Константин Сонин,
Российская экономическая школа и ЦЭФИР
май-июнь 2002

МИКРОЭКОНОМИКА:

Теория общего равновесия

Лекция 6

1. К существованию равновесия

Вернёмся к рассмотрению следующей модели: L – множество товаров, I – множество потребителей, J - множество фирм. На множестве товаров L заданы предпочтения агентов: $\succsim_i$. Для каждого потребителя заданы множество потребления $i \in I \;\Rightarrow\; X_i \subset \mathbb{R}^L$, начальный запас $\omega_i \in \mathbb{R}^L$, а также доля i-го агента в каждой фирме θ_{ij} : $\sum_{i=1}^{I} \theta_{ij}$. Производственные множества: $j \in J \;\Rightarrow\; Y_j \subset \mathbb{R}^L$.

Равновесие в такое экономике это набор $\left\{ \left(X_i, \succsim_i, \omega_i, \theta_{i1}, ..., \theta_{i1} \right)_i, \left(Y_j \right)_j \right\}$, такой что:

(1) $\forall j,\ y_j^* \in Y_j :\ \ p y_j^* \geq p y_j,\ \ \forall y_j \in Y_j$,

(2) $\forall i,\ \ x_i^* \in X_i :\ x_i^* \succsim_i x_i \in \left\{ x_i \in X_i \,\middle|\, p x_i \leq p\omega_i + \sum_j \theta_{ij} y_j^* \right\}$,

(3) $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{i=1}^{I} \omega_i + \sum_{j=1}^{J} y_i^*$ - материальный баланс.

Рассмотрим экономику чистого обмена. Имеется одна-единственная фирма с простейшей технологией. Единственное требование, которому она должна удовлетворять – условие свободного доступа (рис. 1). В данном случае $Y = -\mathbb{R}_+^L$.

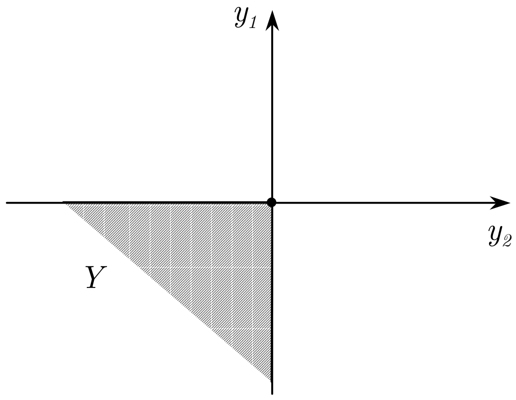

Рис. 1. Производственное множество в экономике чистого обмена

Пусть предпочтения $\succsim$ непрерывны, строго выпуклы и локально ненасыщаемы (строгая монотонность является более сильным требованием, чем локальная ненасыщаемость). Также предположим, что $\sum\limits_i \omega_i > 0,\ \forall i$.

В равновесии выполнены следующие условия (для $\forall i$):

(i) $y_i \le 0,\ \ py_i^* = 0,\ \ p \ge 0$;

(ii) $x_i^* = x_i\left(p, p\omega_i\right)$ - вальрасовский спрос каждого агента;

(iii) $\sum\limits_i x_i = \sum\limits_i \omega_i + y_i^*$.

Условие локальной ненасыщаемости гарантирует нам, что выбор потребителя лежит не внутри его бюджетного множества, а на границе (рис. 2).

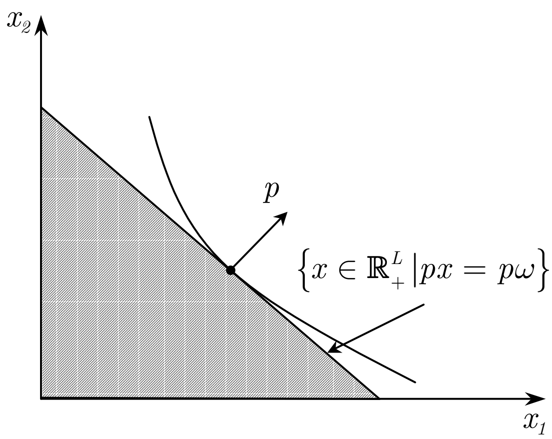

Рис. 2. Выбор потребителя

Утверждение. Равновесный вектор цен $p \ge 0$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_i \left[x_i\left(p, p\omega_i\right) - \omega_i\right] \le 0$.

Прямое утверждение, очевидно, следует из условия баланса (iii) и свойств рассматриваемой технологии.

Докажем обратное утверждение. $y_i = \sum_i \left[x_i \left(p, p\omega_i \right) - \omega_i \right] \le 0$ по условию. Далее, используя определение равновесия и локальную ненасыщаемость предпочтений, получаем требуемое $p\sum_i \left[x_i \left(p, p\omega_i \right) - \omega_i \right] = \sum_i \left[px_i - p\omega_i \right] = 0$ $\Rightarrow \; y^* = 0$.

Ключевым понятием в экономике является понятие ***избыточного спроса***. В нашей модели избыточный спрос i-го потребителя (вектор) задаётся следующим образом: $z_i(p) = x_i\left(p, \omega_i\right) - \omega_i$. Совокупный избыточный спрос тогда равен $z(p) = \sum_i z_i(p)$. Подставив избыточный спрос в предыдущее утверждение, получим $z(p) \le 0$, если – p равновесный вектор цен.

Таким образом, в равновесии Вальраса $p \ge 0, \; z(p) \le 0$ $pz(p) = \sum_i pz_i(p) = 0$. Причём, если избыточный спрос на какой-либо товар отрицателен, то его цена равна нулю, т. е. он является «лишним»: $z^l(p) < 0 \; \Rightarrow \; p^l = 0$.

Далее будем предполагать, что предпочтения $\succsim$ строго монотонны. Тогда в равновесии $z(p) = 0, \; p > 0$.

Свойства функции избыточного спроса (при условии $x_i \in \mathbb{R}_+^L, \; \sum_i \omega_i > 0$, предпочтения непрерывны, строго выпуклы и строго монотонны).

(1) $z(p)$ - непрерывная функция,

(2) $z(p)$ - однородная степени ноль,

(3) $pz(p), \; \forall p$ - имеет место закон Вальраса,

(4) $\exists s > 0: \; z^l(p) > -s, \; \forall l \in L$ - существует нижняя граница,

(5) $p^n \to p, \; p^l = 0, \; p^k \ne 0, \; \forall k \in L \setminus \{l\} \; \Rightarrow \; \max\left\{ z^1(p^n), \ldots, z^l(p^n) \right\}_{n=1}^{+\infty} \to +\infty$

($z^l(p)$ - совокупный избыточный спрос на l-ый продукт).

Свойства $(1)-(4)$ очевидны, тогда как (5) требует некоторых пояснений.

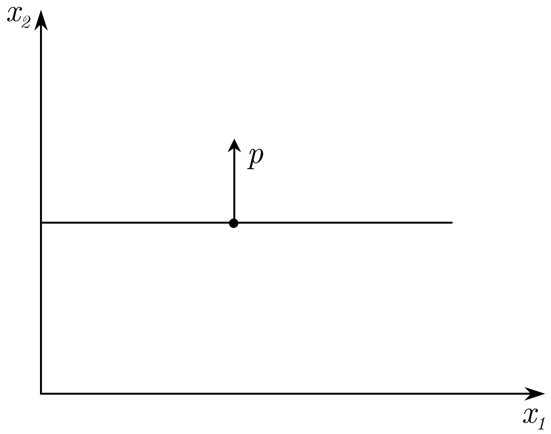

Рис. 3. Бесконечный спрос на товар нулевой цены

Докажем свойство (5).

Возьмём $i: p\omega_i > 0,\ i \in I$. Тогда спрос данного агента $x_i\left(p, p\omega_i\right)$ не определён, поскольку $\nexists x_i^* : x_i^* > x_i,\ px_i \le p\omega_i$.

Допустим, последовательность не расходится в плюс бесконечность, т. е. $t_n = \max\left\{z^1\left(p^n\right),...,z^l\left(p^n\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} \not\to +\infty$, а тогда из $t_n = \left\{z_1^k\left(p^n\right),...,z_I^k\left(p^n\right)\right\}$ следует и $z_i^k\left(p^n\right) \not\to +\infty$. Предположим, $z_i^k\left(p^n\right) \to z_i^{*k}$. Из бюджетного ограничения данного потребителя с учётом $pz_i^*\left(p\right) = 0$ получаем: $x_i^* = z_i^* + \omega_i \ \Rightarrow\ px_i^* = p\omega_i$.

Покажем теперь, что $x_i^* \succsim_i x_i \ \ \forall x_i : px_i \le p\omega_i$. Определим для $\forall n$ отношение $\lambda_n = \dfrac{p^n\omega_i}{p\omega_i}$, тогда $\lambda^n x_i \in \mathbb{R}_+^L,\ \ p^n\left(\lambda^n x_i\right) \le p^n\omega_i$.

Итак, имеем $z_i\left(p^n\right) + \omega_i \succsim_i \lambda^n x_i$. Теперь устремляя к пределу и пользуясь непрерывностью предпочтений, получаем, что $x_i^* \succsim_i x_i$.