

Online Supplementary Appendix

Copula Shrinkage and Portfolio Allocation in Ultra-High Dimensions

Stanislav Anatolyev and Vladimir Pyrlík

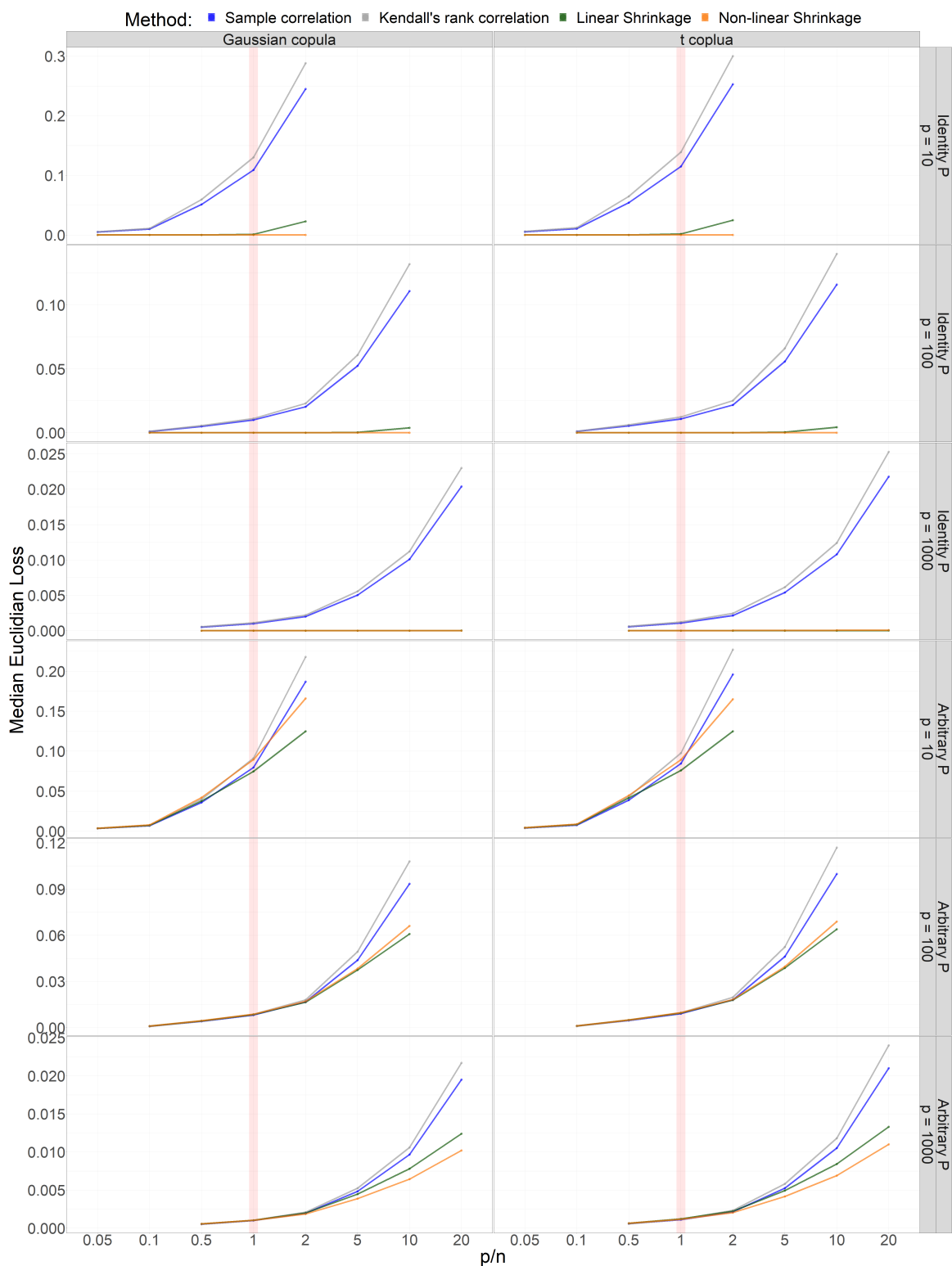


Figure SA1: Median values of Euclidean Loss of different estimators across simulations

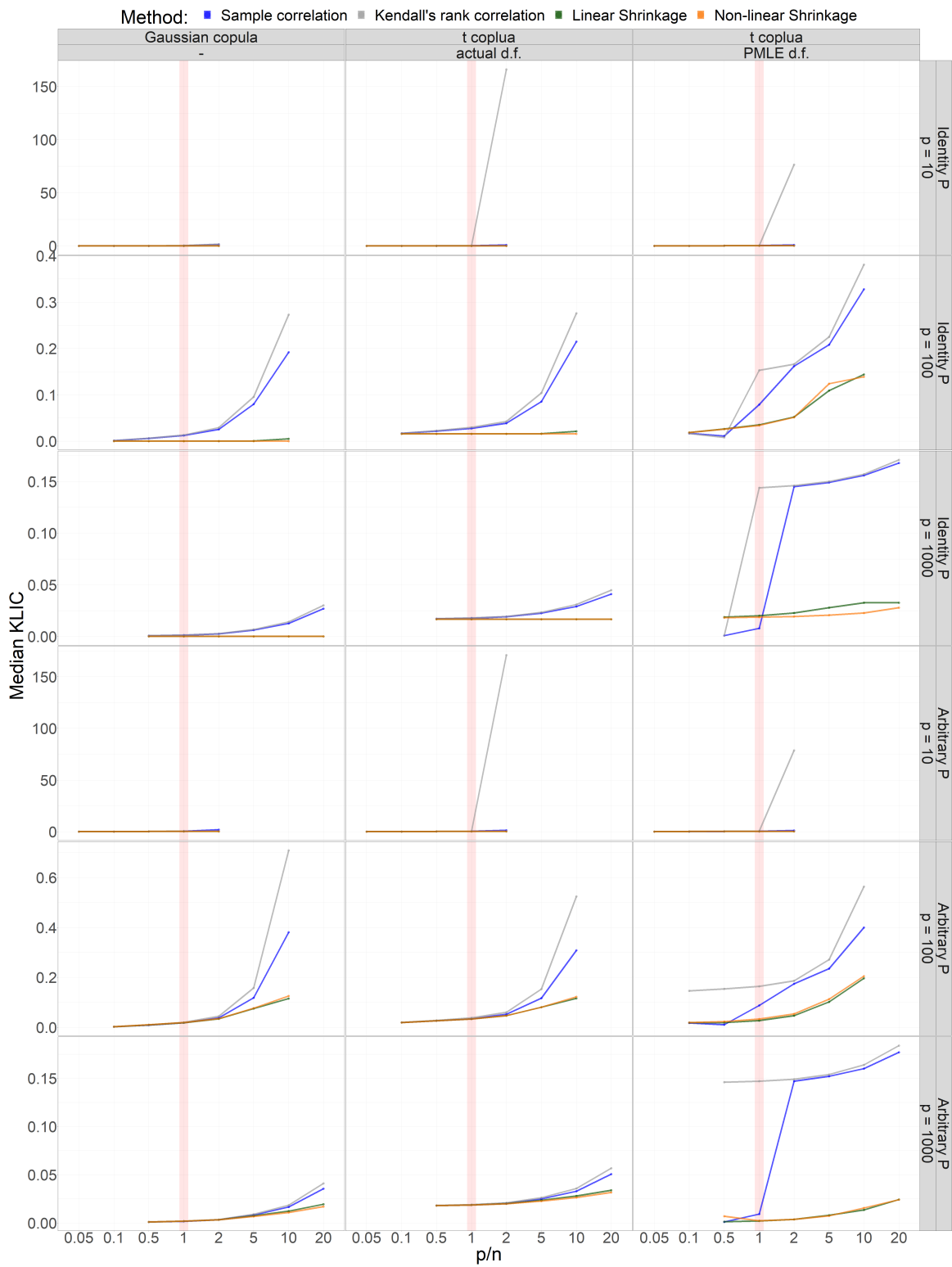


Figure SA2: Median values of KLIC of different estimators across simulations

Table SA1: Precision of estimates for $p = 10$, identity P , Gaussian copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|-------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | mean | s.d. | mean | s.d. |
| 0.05 | 4.90×10^{-3} | 1.04×10^{-3} | 5.40×10^{-3} | 1.14×10^{-3} | 7.64×10^{-5} | 2.00×10^{-4} |
| 0.1 | 9.84×10^{-3} | 2.13×10^{-3} | 1.10×10^{-2} | 2.36×10^{-3} | 9.95×10^{-5} | 4.60×10^{-4} |
| 0.5 | 5.13×10^{-2} | 1.04×10^{-2} | 5.93×10^{-2} | 1.18×10^{-2} | 9.70×10^{-4} | 2.20×10^{-3} |
| 1 | 1.09×10^{-1} | 2.00×10^{-2} | 1.30×10^{-1} | 2.33×10^{-2} | 4.09×10^{-3} | 4.79×10^{-3} |
| 2 | 2.45×10^{-1} | 3.89×10^{-2} | 2.88×10^{-1} | 4.26×10^{-2} | 3.00×10^{-2} | 1.09×10^{-2} |

(b) KLIC

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|-------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | mean | s.d. | mean | s.d. |
| 0.05 | 5.88×10^{-3} | 6.65×10^{-3} | 6.48×10^{-3} | 7.38×10^{-3} | 6.25×10^{-4} | 3.88×10^{-4} |
| 0.1 | 1.32×10^{-2} | 1.39×10^{-2} | 1.49×10^{-2} | 1.59×10^{-2} | 5.68×10^{-4} | 9.94×10^{-4} |
| 0.5 | 7.69×10^{-2} | 1.10×10^{-1} | 9.48×10^{-2} | 1.49×10^{-1} | 1.35×10^{-3} | 4.46×10^{-3} |
| 1 | 2.04×10^{-1} | 5.46×10^{-1} | 2.83×10^{-1} | NaN^{**} | 1.47×10^{-7} | 9.14×10^{-3} |
| 2 | 1.30×10^0 | NaN^{**} | 1.61×10^0 | NaN^{**} | 1.36×10^{-8} | 1.76×10^{-2} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *: value numerically indistinguishable from zero; **: $+\infty$ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA2: Precision of estimates for $p = 10$, identity P , t copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | $\hat{P}^{\text{t-}\tau}$ | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLsh} | |
|-------|-------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|--|-----------------------|
| | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.05 | 5.37×10^{-3} | 1.11×10^{-3} | 6.12×10^{-3} | 1.27×10^{-3} | 5.28×10^{-5} | 1.55×10^{-4} | 1.92×10^{-21} | 1.45×10^{-4} |
| 0.1 | 1.07×10^{-2} | 2.22×10^{-3} | 1.23×10^{-2} | 2.56×10^{-3} | 1.17×10^{-4} | 3.24×10^{-4} | 3.19×10^{-21} | 3.01×10^{-4} |
| 0.5 | 5.43×10^{-2} | 1.11×10^{-2} | 6.46×10^{-2} | 1.29×10^{-2} | 1.11×10^{-3} | 2.40×10^{-3} | 1.45×10^{-20} | 1.30×10^{-3} |
| 1 | 1.15×10^{-1} | 2.17×10^{-2} | 1.39×10^{-1} | 2.53×10^{-2} | 1.52×10^{-3} | 7.85×10^{-3} | 2.57×10^{-8} | 2.18×10^{-3} |
| 2 | 3.53×10^{-1} | 4.33×10^{-2} | 3.00×10^{-1} | 4.84×10^{-2} | 2.48×10^{-2} | 2.84×10^{-2} | 4.72×10^{-10} | 4.24×10^{-3} |

(b) KLIC (known true d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | $\hat{P}^{\text{t-}\tau}$ | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLsh} | |
|-------|-------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|---|-----------------------|
| | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.05 | 2.34×10^{-2} | 6.18×10^{-3} | 2.43×10^{-2} | 7.07×10^{-3} | 1.78×10^{-2} | 2.64×10^{-4} | 1.77×10^{-2} | 1.79×10^{-2} |
| 0.1 | 2.97×10^{-2} | 1.28×10^{-2} | 3.20×10^{-2} | 1.51×10^{-2} | 1.78×10^{-2} | 5.28×10^{-4} | 1.77×10^{-2} | 1.81×10^{-2} |
| 0.5 | 8.88×10^{-2} | 9.63×10^{-2} | 1.06×10^{-1} | 1.20×10^{-1} | 1.92×10^{-2} | 3.92×10^{-3} | 1.77×10^{-2} | 1.96×10^{-2} |
| 1 | 1.97×10^{-1} | 3.31×10^{-1} | 2.55×10^{-1} | 1.04×10^1 | 1.90×10^{-2} | 1.32×10^{-2} | 1.77×10^{-2} | 2.09×10^{-2} |
| 2 | 9.02×10^{-1} | $N_{\alpha}N^{**}$ | 1.66×10^2 | $N_{\alpha}N^{**}$ | 4.70×10^{-2} | 5.14×10^{-2} | 1.77×10^{-2} | 2.33×10^{-2} |

(c) KLIC (MPLF d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | $\hat{P}^{\text{t-}\tau}$ | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLsh} | |
|-------|-------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|
| | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.05 | 2.90×10^{-2} | 9.31×10^{-3} | 2.98×10^{-2} | 9.86×10^{-3} | 2.49×10^{-2} | 7.65×10^{-3} | 2.48×10^{-2} | 2.56×10^{-2} |
| 0.1 | 3.92×10^{-2} | 1.69×10^{-2} | 4.00×10^{-2} | 1.86×10^{-2} | 3.11×10^{-2} | 3.19×10^{-2} | 3.12×10^{-2} | 3.20×10^{-2} |
| 0.5 | 1.04×10^{-1} | 1.08×10^{-1} | 1.48×10^{-1} | 1.48×10^{-1} | 9.93×10^{-2} | 1.00×10^{-1} | 9.93×10^{-2} | 9.97×10^{-2} |
| 1 | 3.18×10^{-1} | 2.57×10^{-1} | 3.69×10^{-1} | 4.79×10^0 | 1.48×10^{-1} | 1.53×10^{-1} | 1.47×10^{-1} | 1.48×10^{-1} |
| 2 | 8.78×10^{-1} | $N_{\alpha}N^{**}$ | 7.65×10^1 | $N_{\alpha}N^{**}$ | 1.77×10^{-1} | 1.93×10^{-1} | 1.47×10^{-1} | 1.53×10^{-1} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *, value numerically indistinguishable from zero; **, +∞ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA3: Precision of estimates for $p = 10$, arbitrary P , Gaussian copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{sampl} | | | $\hat{P}^{\text{r-}\tau}$ | | | \hat{P}^{LSh} | | | \hat{P}^{NLSh} | | |
|-------|------------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. |
| 0.05 | 3.38 $\times 10^{-3}$ | 3.75×10^{-3} | 1.65×10^{-3} | 3.38 $\times 10^{-3}$ | 3.69×10^{-3} | 1.59×10^{-3} | 3.68×10^{-3} | 4.08×10^{-3} | 1.81×10^{-3} | 3.79×10^{-3} | 4.17×10^{-3} | 1.84×10^{-3} |
| 0.1 | 6.85 $\times 10^{-3}$ | 7.48×10^{-3} | 3.27×10^{-3} | 7.01×10^{-3} | 7.61×10^{-3} | 3.28×10^{-3} | 7.27×10^{-3} | 8.17×10^{-3} | 3.68×10^{-3} | 7.80×10^{-3} | 8.53×10^{-3} | 3.77×10^{-3} |
| 0.5 | 3.58 $\times 10^{-2}$ | 3.95×10^{-2} | 1.76×10^{-2} | 3.98×10^{-2} | 4.33×10^{-2} | 1.86×10^{-2} | 3.77×10^{-2} | 4.18×10^{-2} | 1.93×10^{-2} | 4.20×10^{-2} | 4.62×10^{-2} | 2.13×10^{-2} |
| 1 | 7.98×10^{-2} | 8.56×10^{-2} | 3.59×10^{-2} | 9.13×10^{-2} | 9.75×10^{-2} | 3.89×10^{-2} | 7.47 $\times 10^{-2}$ | 7.92×10^{-2} | 3.21×10^{-2} | 8.96×10^{-2} | 9.41×10^{-2} | 3.79×10^{-2} |
| 2 | 1.87×10^{-1} | 2.05×10^{-1} | 8.48×10^{-2} | 2.18×10^{-1} | 2.35×10^{-1} | 9.07×10^{-2} | 1.25 $\times 10^{-1}$ | 1.28×10^{-1} | 4.65×10^{-2} | 1.66×10^{-1} | 1.58×10^{-1} | 4.83×10^{-2} |

(b) KLIC

| p/n | \hat{P}^{sampl} | | | $\hat{P}^{\text{r-}\tau}$ | | | \hat{P}^{LSh} | | | \hat{P}^{NLSh} | | |
|-------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. |
| 0.05 | 7.80×10^{-3} | 8.75×10^{-3} | 5.22×10^{-3} | 8.40×10^{-3} | 9.58×10^{-3} | 5.82×10^{-3} | 7.74 $\times 10^{-3}$ | 8.63×10^{-3} | 5.07×10^{-3} | 8.22×10^{-3} | 9.23×10^{-3} | 5.44×10^{-3} |
| 0.1 | 1.57×10^{-2} | 1.81×10^{-2} | 1.09×10^{-2} | 1.78×10^{-2} | 2.05×10^{-2} | 1.26×10^{-2} | 1.49 $\times 10^{-2}$ | 1.67×10^{-2} | 9.64×10^{-3} | 1.65×10^{-2} | 1.87×10^{-2} | 1.08×10^{-2} |
| 0.5 | 9.66×10^{-2} | 1.22×10^{-1} | 9.78×10^{-2} | 1.24×10^{-1} | 1.64×10^{-1} | 1.46×10^{-1} | 5.82 $\times 10^{-2}$ | 6.68×10^{-2} | 4.03×10^{-2} | 7.07×10^{-2} | 8.07×10^{-2} | 4.98×10^{-2} |
| 1 | 2.70×10^{-1} | 4.27×10^{-1} | 5.27×10^{-1} | 4.33×10^{-1} | NaN^{**} | NaN^{**} | 9.34 $\times 10^{-2}$ | 1.08×10^{-1} | 6.77×10^{-2} | 1.10×10^{-1} | 1.28×10^{-1} | 8.19×10^{-2} |
| 2 | 1.92×10^0 | NaN^{**} | NaN^{**} | 4.33×10^{-1} | NaN^{**} | NaN^{**} | 1.36 $\times 10^{-1}$ | 1.66×10^{-1} | 1.20×10^{-1} | 1.56×10^{-1} | 1.64×10^{-1} | 1.61×10^{-1} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *, value numerically indistinguishable from zero; **, $+\infty$ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA4: Precision of estimates for $p = 10$, arbitrary P , t copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | $\hat{P}^{\text{t-}\tau}$ | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLsh} | |
|-------|------------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | mean | median | mean | median | mean | median | mean |
| 0.05 | 3.96×10^{-3} | 4.33×10^{-3} | 1.94×10^{-3} | 4.21×10^{-3} | 1.90×10^{-3} | 4.40×10^{-3} | 4.47×10^{-3} | 4.84×10^{-3} |
| 0.1 | 7.66 $\times 10^{-3}$ | 8.45×10^{-3} | 3.80×10^{-3} | 8.58×10^{-3} | 3.67×10^{-3} | 8.42×10^{-3} | 8.85×10^{-3} | 9.69×10^{-3} |
| 0.5 | 3.88 $\times 10^{-2}$ | 4.34×10^{-2} | 2.13×10^{-2} | 4.77×10^{-2} | 2.22×10^{-2} | 4.16×10^{-2} | 4.48×10^{-2} | 5.00×10^{-2} |
| 1 | 8.46×10^{-2} | 9.27×10^{-2} | 4.07×10^{-2} | 1.06×10^{-1} | 4.43×10^{-2} | 7.61 $\times 10^{-2}$ | 8.92×10^{-2} | 9.53×10^{-2} |
| 2 | 1.96×10^{-1} | 2.09×10^{-1} | 8.31×10^{-2} | 2.40×10^{-1} | 9.06×10^{-2} | 1.25 $\times 10^{-1}$ | 1.65×10^{-1} | 1.57×10^{-1} |
| | | | s.d. | s.d. | s.d. | s.d. | s.d. | s.d. |
| | | | 1.94×10^{-3} | 4.21×10^{-3} | 1.90×10^{-3} | 4.40×10^{-3} | 4.47×10^{-3} | 4.84×10^{-3} |
| | | | 3.80×10^{-3} | 8.58×10^{-3} | 3.67×10^{-3} | 8.42×10^{-3} | 8.85×10^{-3} | 9.69×10^{-3} |
| | | | 2.13×10^{-2} | 4.77×10^{-2} | 2.22×10^{-2} | 4.16×10^{-2} | 4.48×10^{-2} | 5.00×10^{-2} |
| | | | 4.07×10^{-2} | 1.06×10^{-1} | 4.43×10^{-2} | 7.61 $\times 10^{-2}$ | 8.92×10^{-2} | 9.53×10^{-2} |
| | | | 8.31×10^{-2} | 2.40×10^{-1} | 9.06×10^{-2} | 1.25 $\times 10^{-1}$ | 1.65×10^{-1} | 1.57×10^{-1} |
| | | | | | | | | |
| | | | 2.12×10^{-3} | 4.79×10^{-3} | 2.12×10^{-3} | 4.79×10^{-3} | 4.47×10^{-3} | 4.84×10^{-3} |
| | | | 4.38×10^{-3} | 9.41×10^{-3} | 4.38×10^{-3} | 9.41×10^{-3} | 8.85×10^{-3} | 9.69×10^{-3} |
| | | | 2.27×10^{-2} | 4.62×10^{-2} | 2.27×10^{-2} | 4.62×10^{-2} | 4.48×10^{-2} | 5.00×10^{-2} |
| | | | 3.46×10^{-2} | 8.29×10^{-2} | 3.46×10^{-2} | 7.61 $\times 10^{-2}$ | 8.92×10^{-2} | 9.53×10^{-2} |
| | | | 4.66×10^{-2} | 1.27×10^{-1} | 4.66×10^{-2} | 1.25 $\times 10^{-1}$ | 1.65×10^{-1} | 1.57×10^{-1} |

(b) KLIC (known true d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | $\hat{P}^{\text{t-}\tau}$ | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLsh} | |
|-------|-------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | mean | median | mean | median | mean | median | mean |
| 0.05 | 2.45×10^{-2} | 2.56×10^{-2} | 5.18×10^{-3} | 2.75×10^{-2} | 6.41×10^{-3} | 2.41 $\times 10^{-2}$ | 2.47×10^{-2} | 2.58×10^{-2} |
| 0.1 | 3.21×10^{-2} | 3.40×10^{-2} | 1.01×10^{-2} | 3.76×10^{-2} | 1.25×10^{-2} | 3.07 $\times 10^{-2}$ | 3.20×10^{-2} | 3.40×10^{-2} |
| 0.5 | 1.05×10^{-1} | 1.22×10^{-1} | 7.39×10^{-2} | 1.58×10^{-1} | 1.15×10^{-1} | 6.81 $\times 10^{-2}$ | 7.77×10^{-2} | 8.55×10^{-2} |
| 1 | 2.49×10^{-1} | 3.20×10^{-1} | 2.71×10^{-1} | NaN^{**} | NaN^{**} | 1.02 $\times 10^{-1}$ | 1.15×10^{-1} | 1.28×10^{-1} |
| 2 | 1.26×10^0 | NaN^{**} | 1.71×10^2 | NaN^{**} | NaN^{**} | 1.40 $\times 10^{-1}$ | 1.51×10^{-1} | 1.55×10^{-1} |
| | | | s.d. | s.d. | s.d. | s.d. | s.d. | s.d. |
| | | | 5.18×10^{-3} | 2.75×10^{-2} | 6.41×10^{-3} | 2.41 $\times 10^{-2}$ | 2.47×10^{-2} | 2.58×10^{-2} |
| | | | 1.01×10^{-2} | 3.76×10^{-2} | 1.25×10^{-2} | 3.07 $\times 10^{-2}$ | 3.20×10^{-2} | 3.40×10^{-2} |
| | | | 7.39×10^{-2} | 1.58×10^{-1} | 1.15×10^{-1} | 6.81 $\times 10^{-2}$ | 7.77×10^{-2} | 8.55×10^{-2} |
| | | | 2.71×10^{-1} | NaN^{**} | NaN^{**} | 1.02 $\times 10^{-1}$ | 1.15×10^{-1} | 1.28×10^{-1} |
| | | | 1.71×10^2 | NaN^{**} | NaN^{**} | 1.40 $\times 10^{-1}$ | 1.51×10^{-1} | 1.55×10^{-1} |
| | | | | | | | | |
| | | | 4.84×10^{-3} | 2.52×10^{-2} | 4.84×10^{-3} | 2.41 $\times 10^{-2}$ | 2.47×10^{-2} | 2.58×10^{-2} |
| | | | 8.88×10^{-3} | 3.22×10^{-2} | 8.88×10^{-3} | 3.07 $\times 10^{-2}$ | 3.20×10^{-2} | 3.40×10^{-2} |
| | | | 3.22×10^{-2} | 7.40×10^{-2} | 3.22×10^{-2} | 6.81 $\times 10^{-2}$ | 7.77×10^{-2} | 8.55×10^{-2} |
| | | | 5.27×10^{-2} | 1.10×10^{-1} | 5.27×10^{-2} | 1.02 $\times 10^{-1}$ | 1.15×10^{-1} | 1.28×10^{-1} |
| | | | 9.04×10^{-2} | 1.60×10^{-1} | 9.04×10^{-2} | 1.40 $\times 10^{-1}$ | 1.51×10^{-1} | 1.55×10^{-1} |

(c) KLIC (MPLD d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | $\hat{P}^{\text{t-}\tau}$ | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLsh} | |
|-------|------------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | mean | median | mean | median | mean | median | mean |
| 0.05 | 3.33×10^{-2} | 3.45×10^{-2} | 1.05×10^{-2} | 2.88×10^{-2} | 1.11×10^{-2} | 2.74 $\times 10^{-2}$ | 3.63×10^{-2} | 3.75×10^{-2} |
| 0.1 | 4.19×10^{-2} | 4.42×10^{-2} | 1.74×10^{-2} | 4.48×10^{-2} | 3.05×10^{-2} | 3.73 $\times 10^{-2}$ | 4.89×10^{-2} | 5.12×10^{-2} |
| 0.5 | 1.11 $\times 10^{-1}$ | 1.34×10^{-1} | 9.59×10^{-2} | 2.74×10^{-1} | 1.03×10^{-1} | 1.62×10^{-1} | 1.56×10^{-1} | 1.57×10^{-1} |
| 1 | 3.52×10^{-1} | 4.04×10^{-1} | 2.06×10^{-1} | NaN^{**} | NaN^{**} | 2.00 $\times 10^{-1}$ | 2.09×10^{-1} | 2.22×10^{-1} |
| 2 | 1.10×10^0 | NaN^{**} | 7.87×10^1 | NaN^{**} | NaN^{**} | 2.31 $\times 10^{-1}$ | 2.26×10^{-1} | 2.38×10^{-1} |
| | | | s.d. | s.d. | s.d. | s.d. | s.d. | s.d. |
| | | | 1.05×10^{-2} | 2.88×10^{-2} | 1.11×10^{-2} | 2.74 $\times 10^{-2}$ | 3.63×10^{-2} | 3.75×10^{-2} |
| | | | 1.74×10^{-2} | 4.48×10^{-2} | 3.05×10^{-2} | 3.73 $\times 10^{-2}$ | 4.89×10^{-2} | 5.12×10^{-2} |
| | | | 9.59×10^{-2} | 2.74×10^{-1} | 1.03×10^{-1} | 1.62×10^{-1} | 1.56×10^{-1} | 1.57×10^{-1} |
| | | | 2.06×10^{-1} | NaN^{**} | NaN^{**} | 2.00 $\times 10^{-1}$ | 2.09×10^{-1} | 2.22×10^{-1} |
| | | | 7.87×10^1 | NaN^{**} | NaN^{**} | 2.31 $\times 10^{-1}$ | 2.26×10^{-1} | 2.38×10^{-1} |
| | | | | | | | | |
| | | | 1.08×10^{-2} | 4.06×10^{-2} | 1.08×10^{-2} | 3.63 $\times 10^{-2}$ | 3.63×10^{-2} | 3.75×10^{-2} |
| | | | 1.80×10^{-2} | 5.71×10^{-2} | 1.80×10^{-2} | 4.89 $\times 10^{-2}$ | 4.89×10^{-2} | 5.12×10^{-2} |
| | | | 3.81×10^{-1} | 1.61×10^{-1} | 3.81×10^{-1} | 1.56×10^{-1} | 1.56×10^{-1} | 1.57×10^{-1} |
| | | | 4.72×10^{-2} | 2.10×10^{-1} | 4.72×10^{-2} | 2.09 $\times 10^{-1}$ | 2.09×10^{-1} | 2.22×10^{-1} |
| | | | 8.00×10^{-2} | 2.53×10^{-1} | 8.00×10^{-2} | 2.26 $\times 10^{-1}$ | 2.26×10^{-1} | 2.38×10^{-1} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *: value numerically indistinguishable from zero; **: $+\infty$ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA5: Precision of estimates for $p = 100$, identity P , Gaussian copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{smp} | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | mean | s.d. | mean | s.d. |
| 0.1 | 1.00×10^{-3} | 1.97×10^{-5} | 1.10×10^{-3} | 2.16×10^{-5} | 1.30×10^{-7} | 3.03×10^{-7} |
| 0.5 | 5.03×10^{-3} | 9.54×10^{-5} | 5.55×10^{-3} | 1.05×10^{-4} | 0* | 2.17×10^{-6} |
| 1 | 1.01×10^{-2} | 2.09×10^{-4} | 1.12×10^{-2} | 2.31×10^{-4} | 2.93×10^{-8} | 8.04×10^{-6} |
| 2 | 2.04×10^{-2} | 4.06×10^{-4} | 2.30×10^{-2} | 4.52×10^{-4} | 1.27×10^{-6} | 3.02×10^{-5} |
| 5 | 5.25×10^{-2} | 9.74×10^{-4} | 6.10×10^{-2} | 1.11×10^{-3} | 2.07×10^{-5} | 1.81×10^{-4} |
| 10 | 1.11×10^{-1} | 1.92×10^{-3} | 1.32×10^{-1} | 2.19×10^{-3} | 4.35×10^{-4} | 7.27×10^{-4} |
| | | | | | 3.99×10^{-3} | 4.06×10^{-3} |

(b) KLIC

| p/n | \hat{P}^{smp} | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|--------------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | mean | s.d. | mean | s.d. |
| 0.1 | 1.16×10^{-3} | 1.27×10^{-3} | 1.65×10^{-3} | 1.39×10^{-3} | 1.78×10^{-20} | 1.93×10^{-6} |
| 0.5 | 5.87×10^{-3} | 6.31×10^{-3} | 8.26×10^{-3} | 7.00×10^{-3} | 1.78 × 10⁻²⁰ | 7.09×10^{-6} |
| 1 | 1.21×10^{-2} | 1.40×10^{-2} | 1.81×10^{-2} | 1.58×10^{-2} | 1.78 × 10⁻²⁰ | 6.04×10^{-6} |
| 2 | 2.54×10^{-2} | 3.48×10^{-2} | 4.00×10^{-2} | 3.56×10^{-2} | 1.78 × 10⁻²⁰ | 6.99×10^{-6} |
| 5 | 7.99×10^{-2} | 1.13×10^{-1} | 1.40×10^{-1} | 1.56×10^{-1} | 1.83×10^{-5} | 2.07×10^{-5} |
| 10 | 1.92×10^{-1} | 5.23×10^{-1} | NaN^{**} | NaN^{**} | 5.17×10^{-4} | 6.18×10^{-4} |
| | | | | | 4.85×10^{-3} | 4.19×10^{-3} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *: value numerically indistinguishable from zero; **: +∞ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA6: Precision of estimates for $p = 100$, identity P , t copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{smp} | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.1 | 1.08×10^{-3} | 2.28×10^{-5} | 1.22×10^{-3} | 2.65×10^{-5} | 1.67×10^{-21} | 3.11×10^{-6} |
| 0.5 | 5.40×10^{-3} | 1.14×10^{-4} | 6.17×10^{-3} | 1.39×10^{-4} | 1.82×10^{-5} | 1.92×10^{-5} |
| 1 | 1.08×10^{-2} | 2.37×10^{-4} | 1.24×10^{-2} | 3.03×10^{-4} | 3.85×10^{-5} | 4.11×10^{-5} |
| 2 | 2.18×10^{-2} | 5.43×10^{-4} | 2.52×10^{-2} | 7.31×10^{-4} | 6.49×10^{-5} | 7.28×10^{-5} |
| 5 | 5.58×10^{-2} | 1.59×10^{-3} | 6.62×10^{-2} | 2.25×10^{-3} | 1.90×10^{-4} | 2.08×10^{-4} |
| 10 | 1.16×10^{-1} | 3.55×10^{-3} | 1.40×10^{-1} | 5.05×10^{-3} | 1.38 $\times 10^{-4}$ | 4.65×10^{-4} |

(b) KLIC (known true d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smp} | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.1 | 1.68×10^{-2} | 1.27×10^{-3} | 1.69×10^{-2} | 1.44×10^{-3} | 1.56 $\times 10^{-2}$ | 1.57×10^{-2} |
| 0.5 | 2.17×10^{-2} | 6.43×10^{-3} | 2.26×10^{-2} | 7.45×10^{-3} | 1.56 $\times 10^{-2}$ | 1.57×10^{-2} |
| 1 | 2.76×10^{-2} | 1.40×10^{-2} | 2.95×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 1.56 $\times 10^{-2}$ | 1.57×10^{-2} |
| 2 | 3.87×10^{-2} | 2.99×10^{-2} | 4.24×10^{-2} | 3.55×10^{-2} | 1.57 $\times 10^{-2}$ | 1.58×10^{-2} |
| 5 | 8.55×10^{-2} | 1.03×10^{-1} | 1.04×10^{-1} | 1.32×10^{-1} | 1.57 $\times 10^{-2}$ | 1.59×10^{-2} |
| 10 | 2.15×10^{-1} | 3.40×10^{-1} | 2.76×10^{-1} | 2.12×10^{-2} | 1.58 $\times 10^{-2}$ | 1.61×10^{-2} |

(c) KLIC (MPLD d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smp} | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|------------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.1 | 1.68×10^{-2} | 2.03×10^{-3} | 1.67 $\times 10^{-2}$ | 2.13×10^{-3} | 1.86×10^{-2} | 1.70×10^{-3} |
| 0.5 | 1.08×10^{-2} | 7.52×10^{-3} | 7.85 $\times 10^{-3}$ | 1.80×10^{-2} | 2.60×10^{-2} | 4.17×10^{-3} |
| 1 | 7.92×10^{-2} | 2.62×10^{-2} | 1.53×10^{-1} | 1.65×10^{-2} | 3.39 $\times 10^{-2}$ | 6.18×10^{-3} |
| 2 | 1.62×10^{-1} | 2.92×10^{-2} | 1.66×10^{-1} | 3.44×10^{-2} | 5.13 $\times 10^{-2}$ | 8.99×10^{-3} |
| 5 | 2.08×10^{-1} | 9.15×10^{-2} | 2.25×10^{-1} | 1.14×10^{-1} | 1.24×10^{-1} | 1.18×10^{-2} |
| 10 | 3.28×10^{-1} | 2.64×10^{-1} | 3.81×10^{-1} | 1.45×10^{-1} | 1.39 $\times 10^{-1}$ | 1.04×10^{-3} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *, value numerically indistinguishable from zero; **, $+\infty$ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA7: Precision of estimates for $p = 100$, arbitrary P , Gaussian copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLsh} | |
|-------|---|-----------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | mean | s.d. | mean | s.d. |
| 0.1 | 9.33×10^{-4} | 1.97×10^{-4} | 8.70×10^{-4} | 1.63×10^{-4} | 1.03×10^{-3} | 2.14×10^{-4} |
| 0.5 | 4.13×10^{-3} | 8.68×10^{-4} | 4.36×10^{-3} | 8.44×10^{-4} | 4.47×10^{-3} | 9.86×10^{-4} |
| 1 | 8.18×10^{-3} | 1.68×10^{-3} | 8.92×10^{-3} | 1.69×10^{-3} | 9.09×10^{-3} | 1.92×10^{-3} |
| 2 | 1.67×10^{-2} | 3.30×10^{-3} | 1.85×10^{-2} | 3.35×10^{-3} | 1.76×10^{-2} | 3.83×10^{-3} |
| 5 | 4.39×10^{-2} | 8.63×10^{-3} | 5.05×10^{-2} | 8.99×10^{-3} | 3.98×10^{-2} | 8.73×10^{-3} |
| 10 | 9.34×10^{-2} | 1.77×10^{-2} | 1.11×10^{-1} | 1.89×10^{-2} | 6.73×10^{-2} | 1.27×10^{-2} |

(b) KLIC

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLsh} | |
|-------|---|-----------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | mean | s.d. | mean | s.d. |
| 0.1 | 2.14×10^{-3} | 6.82×10^{-4} | 1.87×10^{-3} | 5.64×10^{-4} | 2.41×10^{-3} | 7.57×10^{-4} |
| 0.5 | 8.81×10^{-3} | 2.70×10^{-3} | 9.65×10^{-3} | 2.91×10^{-3} | 9.87×10^{-3} | 2.99×10^{-3} |
| 1 | 1.80×10^{-2} | 5.59×10^{-3} | 2.07×10^{-2} | 6.47×10^{-3} | 1.86×10^{-2} | 5.71×10^{-3} |
| 2 | 3.74×10^{-2} | 1.25×10^{-2} | 4.60×10^{-2} | 1.55×10^{-2} | 3.44×10^{-2} | 1.03×10^{-2} |
| 5 | 1.18×10^{-1} | 4.75×10^{-2} | 1.73×10^{-1} | 8.04×10^{-2} | 7.61×10^{-2} | 2.05×10^{-2} |
| 10 | 3.81×10^{-1} | NaN^{**} | 7.09×10^{-1} | 1.15×10^{-1} | 1.25×10^{-1} | 2.71×10^{-1} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *: value numerically indistinguishable from zero; **: $+\infty$ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA8: Precision of estimates for $p = 100$, arbitrary P , t copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{simpl} | | $\hat{P}^{\text{i-}\tau}$ | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLSH} | |
|-------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.1 | 1.12×10^{-3} | 2.30×10^{-4} | 9.42×10^{-4} | 1.76×10^{-4} | 1.22×10^{-3} | 2.50×10^{-4} | 1.23×10^{-3} | 2.50×10^{-4} |
| 0.5 | 4.66×10^{-3} | 4.80×10^{-3} | 4.79×10^{-3} | 8.93×10^{-4} | 5.04×10^{-3} | 1.05×10^{-3} | 5.06×10^{-3} | 1.12×10^{-3} |
| 1 | 9.12×10^{-3} | 9.38×10^{-3} | 9.67×10^{-3} | 1.81×10^{-3} | 9.49×10^{-3} | 2.13×10^{-3} | 9.68×10^{-3} | 2.14×10^{-3} |
| 2 | 1.81×10^{-2} | 1.86×10^{-2} | 1.97×10^{-2} | 3.65×10^{-3} | 1.79×10^{-2} | 4.05×10^{-3} | 1.83×10^{-2} | 3.82×10^{-3} |
| 5 | 4.62×10^{-2} | 4.77×10^{-2} | 5.24×10^{-2} | 9.18×10^{-3} | 3.87×10^{-2} | 8.64×10^{-3} | 3.96×10^{-2} | 9.12×10^{-3} |
| 10 | 9.98×10^{-2} | 1.03×10^{-1} | 1.17×10^{-1} | 2.13×10^{-2} | 6.39×10^{-2} | 1.32×10^{-2} | 6.89×10^{-2} | 1.41×10^{-2} |

(b) KLIC (known true d.f.)

| p/n | \hat{P}^{simpl} | | $\hat{P}^{\text{i-}\tau}$ | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLSH} | |
|-------|---|-----------------------|---------------------------|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|
| | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.1 | 1.89×10^{-2} | 5.01×10^{-4} | 1.95×10^{-2} | 7.25×10^{-4} | 1.90×10^{-2} | 5.30×10^{-4} | 1.90×10^{-2} | 5.32×10^{-4} |
| 0.5 | 2.56×10^{-2} | 2.58×10^{-2} | 2.73×10^{-2} | 3.25×10^{-3} | 2.57×10^{-2} | 2.54×10^{-3} | 2.57×10^{-2} | 2.47×10^{-3} |
| 1 | 3.39×10^{-2} | 3.47×10^{-2} | 3.74×10^{-2} | 6.79×10^{-3} | 3.28×10^{-2} | 5.00×10^{-3} | 3.28×10^{-2} | 4.74×10^{-3} |
| 2 | 5.20×10^{-2} | 5.32×10^{-2} | 6.02×10^{-2} | 1.41×10^{-2} | 4.68×10^{-2} | 8.77×10^{-3} | 4.63×10^{-2} | 8.37×10^{-3} |
| 5 | 1.17×10^{-1} | 1.23×10^{-1} | 1.53×10^{-1} | 6.28×10^{-2} | 8.00×10^{-2} | 1.68×10^{-2} | 8.07×10^{-2} | 1.76×10^{-2} |
| 10 | 3.08×10^{-1} | NaN^{**} | 5.24×10^{-1} | NaN^{**} | 1.16×10^{-1} | 2.31×10^{-2} | 1.22×10^{-1} | 2.21×10^{-2} |

(c) KLIC (MPL E d.f.)

| p/n | \hat{P}^{simpl} | | $\hat{P}^{\text{i-}\tau}$ | | \hat{P}^{Lsh} | | \hat{P}^{NLSH} | |
|-------|---|-----------------------|---------------------------|-----------------------|---|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.1 | 1.74×10^{-2} | 1.75×10^{-2} | 1.46×10^{-1} | 1.89×10^{-2} | 1.84×10^{-2} | 2.12×10^{-3} | 1.92×10^{-2} | 2.15×10^{-3} |
| 0.5 | 1.03×10^{-2} | 1.05×10^{-2} | 1.54×10^{-1} | 5.45×10^{-3} | 1.91×10^{-2} | 3.64×10^{-3} | 2.30×10^{-2} | 3.87×10^{-3} |
| 1 | 8.76×10^{-2} | 9.31×10^{-2} | 1.64×10^{-1} | 9.15×10^{-3} | 2.67×10^{-2} | 5.98×10^{-3} | 3.27×10^{-2} | 5.97×10^{-3} |
| 2 | 1.74×10^{-1} | 1.75×10^{-1} | 1.86×10^{-1} | 1.60×10^{-2} | 4.67×10^{-2} | 9.57×10^{-3} | 5.38×10^{-2} | 9.49×10^{-3} |
| 5 | 2.35×10^{-1} | 2.40×10^{-1} | 2.71×10^{-1} | 5.33×10^{-2} | 1.02×10^{-1} | 1.82×10^{-2} | 1.13×10^{-1} | 1.90×10^{-2} |
| 10 | 4.00×10^{-1} | NaN^{**} | 5.64×10^{-1} | NaN^{**} | 1.96×10^{-1} | 2.14×10^{-2} | 2.05×10^{-1} | 1.69×10^{-2} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *, value numerically indistinguishable from zero; **, $+\infty$ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA9: Precision of estimates for $p = 1000$, identity P , Gaussian copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{simpl} | | | \hat{P}^{LSh} | | | \hat{P}^{NLSh} | | |
|-------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. |
| 0.5 | 5.00×10^{-4} | 5.00×10^{-4} | 1.01×10^{-6} | 5.49×10^{-4} | 5.49×10^{-4} | 1.10×10^{-6} | 1.18×10^{-11} | 1.18×10^{-9} | 2.50×10^{-9} |
| 1 | 1.00×10^{-3} | 1.00×10^{-3} | 2.04×10^{-6} | 1.10×10^{-3} | 1.10×10^{-3} | 2.24×10^{-6} | 1.17×10^{-9} | 4.57×10^{-9} | 7.68×10^{-9} |
| 2 | 2.00×10^{-3} | 2.00×10^{-3} | 4.00×10^{-6} | 2.20×10^{-3} | 2.20×10^{-3} | 4.38×10^{-6} | 2.03×10^{-8} | 2.88×10^{-8} | 2.88×10^{-8} |
| 5 | 5.03×10^{-3} | 5.03×10^{-3} | 1.01×10^{-5} | 5.55×10^{-3} | 5.55×10^{-3} | 1.12×10^{-5} | 4.24×10^{-7} | 4.44×10^{-7} | 1.88×10^{-7} |
| 10 | 1.01×10^{-2} | 1.01×10^{-2} | 1.93×10^{-5} | 1.12×10^{-2} | 1.12×10^{-2} | 2.13×10^{-5} | 3.73×10^{-6} | 3.78×10^{-6} | 7.45×10^{-7} |
| 20 | 2.04×10^{-2} | 2.04×10^{-2} | 4.08×10^{-5} | 2.30×10^{-2} | 2.30×10^{-2} | 4.61×10^{-5} | 3.13×10^{-5} | 3.15×10^{-5} | 3.21×10^{-6} |

(b) KLIC

| p/n | \hat{P}^{simpl} | | | \hat{P}^{LSh} | | | \hat{P}^{NLSh} | | |
|-------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. |
| 0.5 | 5.95×10^{-4} | 7.65×10^{-4} | 6.22×10^{-4} | 6.57×10^{-4} | 8.40×10^{-4} | 6.83×10^{-4} | 0^* | 1.52×10^{-9} | 1.53×10^{-7} |
| 1 | 1.18×10^{-3} | 1.49×10^{-3} | 1.24×10^{-3} | 1.29×10^{-3} | 1.64×10^{-3} | 1.36×10^{-3} | 0^* | 0^* | 0^* |
| 2 | 2.44×10^{-3} | 3.09×10^{-3} | 2.47×10^{-3} | 2.72×10^{-3} | 3.41×10^{-3} | 2.72×10^{-3} | 0^* | 3.86×10^{-8} | 7.43×10^{-7} |
| 5 | 6.05×10^{-3} | 7.73×10^{-3} | 6.31×10^{-3} | 6.68×10^{-3} | 8.56×10^{-3} | 6.97×10^{-3} | 1.39×10^{-7} | 4.91×10^{-7} | 2.92×10^{-6} |
| 10 | 1.25×10^{-2} | 1.64×10^{-2} | 1.43×10^{-2} | 1.41×10^{-2} | 1.83×10^{-2} | 1.58×10^{-2} | 4.02×10^{-6} | 6.22×10^{-6} | 1.02×10^{-5} |
| 20 | 2.69×10^{-2} | 3.42×10^{-2} | 2.85×10^{-2} | 3.01×10^{-2} | 3.88×10^{-2} | 3.23×10^{-2} | 3.79×10^{-5} | 4.65×10^{-5} | 4.10×10^{-5} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *; value numerically indistinguishable from zero; **; $+\infty$ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA10: Precision of estimates for $p = 1000$, identity P , t copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{smp1} | | | $\hat{P}^{\text{t-t}}$ | | | \hat{P}^{LSh} | | | \hat{P}^{NLSH} | | |
|-------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. |
| 0.5 | 5.38×10^{-4} | 5.38×10^{-4} | 1.66×10^{-6} | 6.12×10^{-4} | 6.12×10^{-4} | 2.43×10^{-6} | 8.39×10^{-11} | 1.47×10^{-9} | 2.87×10^{-9} | 2.46×10^{-6} | 1.57×10^{-6} | 1.33×10^{-6} |
| 1 | 1.08×10^{-3} | 1.08×10^{-3} | 4.03×10^{-6} | 1.22×10^{-3} | 1.22×10^{-3} | 6.08×10^{-6} | 2.63×10^{-9} | 6.63×10^{-9} | 1.01×10^{-8} | 5.11×10^{-6} | 3.92×10^{-6} | 2.37×10^{-6} |
| 2 | 2.15×10^{-3} | 2.15×10^{-3} | 1.05×10^{-5} | 2.45×10^{-3} | 2.45×10^{-3} | 1.69×10^{-5} | 2.66×10^{-8} | 3.36×10^{-8} | 3.10×10^{-8} | 9.93×10^{-6} | 9.43×10^{-6} | 2.75×10^{-6} |
| 5 | 5.40×10^{-3} | 5.40×10^{-3} | 3.84×10^{-5} | 6.16×10^{-3} | 6.16×10^{-3} | 6.29×10^{-5} | 4.88×10^{-7} | 5.14×10^{-7} | 2.05×10^{-7} | 2.37×10^{-5} | 2.42×10^{-5} | 5.59×10^{-6} |
| 10 | 1.08×10^{-2} | 1.08×10^{-2} | 1.10×10^{-4} | 1.24×10^{-2} | 1.24×10^{-2} | 1.81×10^{-4} | 4.30×10^{-6} | 4.34×10^{-6} | 8.43×10^{-7} | 4.54×10^{-5} | 4.79×10^{-5} | 1.63×10^{-5} |
| 20 | 2.18×10^{-2} | 2.18×10^{-2} | 2.90×10^{-4} | 2.53×10^{-2} | 2.53×10^{-2} | 4.80×10^{-4} | 3.60×10^{-5} | 3.61×10^{-5} | 3.52×10^{-6} | 8.77×10^{-5} | 9.41×10^{-5} | 4.34×10^{-5} |

(b) KLIC (known true d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smp1} | | | $\hat{P}^{\text{t-t}}$ | | | \hat{P}^{LSh} | | | \hat{P}^{NLSH} | | |
|-------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. |
| 0.5 | 1.71×10^{-2} | 1.72×10^{-2} | 6.16×10^{-4} | 1.72×10^{-2} | 1.73×10^{-2} | 6.99×10^{-4} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 1.87×10^{-7} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 6.75×10^{-6} |
| 1 | 1.76×10^{-2} | 1.79×10^{-2} | 1.19×10^{-3} | 1.78×10^{-2} | 1.81×10^{-2} | 1.35×10^{-3} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 3.54×10^{-7} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 1.30×10^{-5} |
| 2 | 1.90×10^{-2} | 1.96×10^{-2} | 2.52×10^{-3} | 1.93×10^{-2} | 2.01×10^{-2} | 2.89×10^{-3} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 9.99×10^{-7} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 2.10×10^{-5} |
| 5 | 2.24×10^{-2} | 2.43×10^{-2} | 7.00×10^{-3} | 2.32×10^{-2} | 2.55×10^{-2} | 8.00×10^{-3} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 3.74×10^{-6} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 4.09×10^{-5} |
| 10 | 2.90×10^{-2} | 3.18×10^{-2} | 1.23×10^{-2} | 3.08×10^{-2} | 3.41×10^{-2} | 1.43×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 1.20×10^{-5} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 8.70×10^{-5} |
| 20 | 4.09×10^{-2} | 4.95×10^{-2} | 2.97×10^{-2} | 4.47×10^{-2} | 5.56×10^{-2} | 3.57×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 1.65×10^{-2} | 5.07×10^{-5} | 1.66×10^{-2} | 1.66×10^{-2} | 1.31×10^{-4} |

(c) KLIC (MPLLE d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smp1} | | | $\hat{P}^{\text{t-t}}$ | | | \hat{P}^{LSh} | | | \hat{P}^{NLSH} | | |
|-------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. |
| 0.5 | 6.65×10^{-4} | 8.27×10^{-4} | 6.77×10^{-4} | 7.58×10^{-4} | 9.41×10^{-4} | 7.70×10^{-4} | 1.86×10^{-2} | 1.86×10^{-2} | 1.26×10^{-3} | 1.81×10^{-2} | 1.81×10^{-2} | 1.30×10^{-3} |
| 1 | 7.72×10^{-3} | 7.78×10^{-3} | 2.26×10^{-3} | 1.44×10^{-1} | 1.44×10^{-1} | 1.38×10^{-3} | 2.00×10^{-2} | 2.00×10^{-2} | 1.65×10^{-3} | 1.86×10^{-2} | 1.88×10^{-2} | 1.82×10^{-3} |
| 2 | 1.45×10^{-1} | 1.46×10^{-1} | 2.58×10^{-3} | 1.46×10^{-1} | 1.46×10^{-1} | 2.95×10^{-3} | 2.26×10^{-2} | 2.27×10^{-2} | 2.61×10^{-3} | 1.93×10^{-2} | 1.95×10^{-2} | 2.36×10^{-3} |
| 5 | 1.49×10^{-1} | 1.51×10^{-1} | 7.10×10^{-3} | 1.50×10^{-1} | 1.52×10^{-1} | 8.09×10^{-3} | 2.79×10^{-2} | 2.81×10^{-2} | 3.92×10^{-3} | 2.06×10^{-2} | 2.09×10^{-2} | 2.64×10^{-3} |
| 10 | 1.56×10^{-1} | 1.58×10^{-1} | 1.24×10^{-2} | 1.57×10^{-1} | 1.61×10^{-1} | 1.44×10^{-2} | 3.25×10^{-2} | 3.33×10^{-2} | 5.43×10^{-3} | 2.27×10^{-2} | 2.30×10^{-2} | 2.66×10^{-3} |
| 20 | 1.68×10^{-1} | 1.76×10^{-1} | 2.90×10^{-2} | 1.71×10^{-1} | 1.82×10^{-1} | 3.45×10^{-2} | 3.26×10^{-2} | 3.34×10^{-2} | 6.07×10^{-3} | 2.78×10^{-2} | 2.81×10^{-2} | 2.08×10^{-3} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *, value numerically indistinguishable from zero; **, +∞ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA11: Precision of estimates for $p = 1000$, arbitrary P , Gaussian copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{smp} | | | \hat{P}^{LSh} | | | \hat{P}^{NLSh} | | |
|-------|---|-----------------------|-----------------------|---|-----------------------|-----------------------|-------------------------|---|-----------------------|
| | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. |
| 0.5 | 5.22×10^{-4} | 5.29×10^{-4} | 3.89×10^{-5} | 5.17×10^{-4} | 5.20×10^{-4} | 2.38×10^{-5} | 5.54×10^{-4} | 5.63×10^{-4} | 5.06×10^{-5} |
| 1 | 9.96×10^{-4} | 1.01×10^{-3} | 6.53×10^{-5} | 1.03×10^{-3} | 1.04×10^{-3} | 4.80×10^{-5} | 1.04×10^{-3} | 1.06×10^{-3} | 9.69×10^{-5} |
| 2 | 1.95×10^{-3} | 1.97×10^{-3} | 1.09×10^{-4} | 2.08×10^{-3} | 2.09×10^{-3} | 9.47×10^{-5} | 1.98×10^{-3} | 2.00×10^{-3} | 1.82×10^{-4} |
| 5 | 4.83×10^{-3} | 4.86×10^{-3} | 2.56×10^{-4} | 5.24×10^{-3} | 5.26×10^{-3} | 2.31×10^{-4} | 4.47×10^{-3} | 4.55×10^{-3} | 4.96×10^{-4} |
| 10 | 9.65×10^{-3} | 9.71×10^{-3} | 4.69×10^{-4} | 1.06×10^{-2} | 1.06×10^{-2} | 4.56×10^{-4} | 7.80×10^{-3} | 7.89×10^{-3} | 8.98×10^{-4} |
| 20 | 1.95×10^{-2} | 1.96×10^{-2} | 9.45×10^{-4} | 2.17×10^{-2} | 2.18×10^{-2} | 9.48×10^{-4} | 1.24×10^{-2} | 1.26×10^{-2} | 1.45×10^{-3} |

(b) KLIC

| p/n | \hat{P}^{smp} | | | \hat{P}^{LSh} | | | \hat{P}^{NLSh} | | |
|-------|---|-----------------------|-----------------------|---|-----------------------|-----------------------|-------------------------|---|-----------------------|
| | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. | median | mean | s.d. |
| 0.5 | 8.54×10^{-4} | 8.62×10^{-4} | 1.50×10^{-4} | 8.45×10^{-4} | 8.53×10^{-4} | 1.41×10^{-4} | 9.13×10^{-4} | 9.24×10^{-4} | 1.65×10^{-4} |
| 1 | 1.62×10^{-3} | 1.64×10^{-3} | 2.69×10^{-4} | 1.70×10^{-3} | 1.71×10^{-3} | 2.74×10^{-4} | 1.71×10^{-3} | 1.73×10^{-3} | 3.00×10^{-4} |
| 2 | 3.18×10^{-3} | 3.21×10^{-3} | 5.07×10^{-4} | 3.42×10^{-3} | 3.46×10^{-3} | 5.48×10^{-4} | 3.21×10^{-3} | 3.25×10^{-3} | 5.48×10^{-4} |
| 5 | 8.02×10^{-3} | 8.06×10^{-3} | 1.27×10^{-3} | 8.82×10^{-3} | 8.89×10^{-3} | 1.41×10^{-3} | 7.19×10^{-3} | 7.29×10^{-3} | 1.24×10^{-3} |
| 10 | 1.64×10^{-2} | 1.66×10^{-2} | 2.72×10^{-3} | 1.84×10^{-2} | 1.86×10^{-2} | 3.09×10^{-3} | 1.22×10^{-2} | 1.24×10^{-2} | 2.22×10^{-3} |
| 20 | 3.55×10^{-2} | 3.58×10^{-2} | 6.13×10^{-3} | 4.09×10^{-2} | 4.14×10^{-2} | 7.22×10^{-3} | 1.93×10^{-2} | 1.96×10^{-2} | 3.08×10^{-3} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *: value numerically indistinguishable from zero; **: $+\infty$ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}

Table SA12: Precision of estimates for $p = 1000$, arbitrary P, t copula

(a) Euclidean loss

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | $\hat{P}^{\text{i-}\tau}$ | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|---|-----------------------|---------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|---|-----------------------|
| | median | s.d. | mean | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.5 | 5.98×10^{-4} | 6.06×10^{-4} | 5.81×10^{-4} | 2.62×10^{-5} | 6.48×10^{-4} | 6.42×10^{-5} | 6.47×10^{-4} | 6.54×10^{-4} |
| 1 | 1.12×10^{-3} | 1.13×10^{-3} | 1.16×10^{-3} | 5.09×10^{-5} | 1.20×10^{-3} | 1.14×10^{-4} | 1.16×10^{-3} | 1.17×10^{-3} |
| 2 | 2.14×10^{-3} | 2.16×10^{-3} | 2.33×10^{-3} | 1.04×10^{-4} | 2.21×10^{-3} | 2.19×10^{-4} | 2.04×10^{-3} | 2.07×10^{-3} |
| 5 | 5.24×10^{-3} | 5.28×10^{-3} | 5.85×10^{-3} | 2.55×10^{-4} | 4.93×10^{-3} | 5.31×10^{-4} | 4.16×10^{-3} | 4.23×10^{-3} |
| 10 | 1.05×10^{-2} | 1.05×10^{-2} | 1.18×10^{-2} | 5.47×10^{-4} | 8.43×10^{-3} | 9.78×10^{-4} | 6.89×10^{-3} | 6.99×10^{-3} |
| 20 | 2.10×10^{-2} | 2.11×10^{-2} | 2.41×10^{-2} | 1.15×10^{-3} | 1.33×10^{-2} | 1.48×10^{-3} | 1.10×10^{-2} | 1.12×10^{-2} |

(b) KLIC (known true d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | $\hat{P}^{\text{i-}\tau}$ | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|---|-----------------------|---------------------------|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|
| | median | s.d. | mean | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.5 | 1.79×10^{-2} | 1.79×10^{-2} | 1.81×10^{-2} | 1.67×10^{-4} | 1.79×10^{-2} | 1.23×10^{-4} | 1.79×10^{-2} | 1.79×10^{-2} |
| 1 | 1.86×10^{-2} | 1.87×10^{-2} | 1.90×10^{-2} | 2.95×10^{-4} | 1.86×10^{-2} | 2.30×10^{-4} | 1.86×10^{-2} | 1.86×10^{-2} |
| 2 | 2.02×10^{-2} | 2.02×10^{-2} | 2.07×10^{-2} | 5.83×10^{-4} | 2.00×10^{-2} | 4.48×10^{-4} | 1.98×10^{-2} | 1.98×10^{-2} |
| 5 | 2.48×10^{-2} | 2.48×10^{-2} | 2.61×10^{-2} | 1.45×10^{-3} | 2.34×10^{-2} | 1.10×10^{-3} | 2.27×10^{-2} | 2.28×10^{-2} |
| 10 | 3.29×10^{-2} | 3.31×10^{-2} | 3.60×10^{-2} | 3.08×10^{-3} | 2.80×10^{-2} | 1.72×10^{-3} | 2.63×10^{-2} | 2.64×10^{-2} |
| 20 | 5.06×10^{-2} | 5.07×10^{-2} | 5.73×10^{-2} | 6.96×10^{-3} | 3.39×10^{-2} | 2.54×10^{-3} | 3.16×10^{-2} | 3.17×10^{-2} |

(c) KLIC (MPLÉ d.f.)

| p/n | \hat{P}^{smpl} | | $\hat{P}^{\text{i-}\tau}$ | | \hat{P}^{LSh} | | \hat{P}^{NLSh} | |
|-------|---|-----------------------|---------------------------|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|
| | median | s.d. | mean | s.d. | median | s.d. | median | s.d. |
| 0.5 | 9.79×10^{-4} | 9.99×10^{-4} | 1.46×10^{-1} | 4.31×10^{-4} | 1.07×10^{-3} | 1.94×10^{-4} | 6.94×10^{-3} | 6.94×10^{-3} |
| 1 | 9.03×10^{-3} | 3.93×10^{-2} | 1.47×10^{-1} | 6.20×10^{-4} | 1.97×10^{-3} | 3.31×10^{-4} | 2.08×10^{-3} | 1.35×10^{-2} |
| 2 | 1.47×10^{-1} | 1.47×10^{-1} | 1.49×10^{-1} | 9.73×10^{-4} | 3.65×10^{-3} | 6.01×10^{-4} | 3.60×10^{-3} | 3.61×10^{-3} |
| 5 | 1.52×10^{-1} | 1.52×10^{-1} | 1.54×10^{-1} | 1.95×10^{-3} | 7.96×10^{-3} | 1.43×10^{-3} | 7.25×10^{-3} | 7.37×10^{-3} |
| 10 | 1.60×10^{-1} | 1.60×10^{-1} | 1.64×10^{-1} | 3.62×10^{-3} | 1.35×10^{-2} | 2.16×10^{-3} | 1.55×10^{-2} | 1.49×10^{-2} |
| 20 | 1.77×10^{-1} | 1.78×10^{-1} | 1.85×10^{-1} | 7.15×10^{-3} | 2.42×10^{-2} | 3.67×10^{-3} | 2.41×10^{-2} | 2.43×10^{-2} |

Notes. In each row minimal median value is in **bold**; *, value numerically indistinguishable from zero; **, $+\infty$ values of KLIC in the samples due to non-PD \hat{P}