Теория контрактов
Сборник задач
для домашних заданий и экзаменов [1]

Составители: преподаватели РЭШ Сергей Головань,
Сергей Гуриев, Алексей Макрушин.

24 ноября 2003 г.

[1]Предварительный вариант; все замечания и предложения направлять по адресу sguriev@nes.ru. Данный сборник содержит задачи для семестрового магистерского/аспирантского курса по теории контрактов. При составлении использовались задачи из курсов теории контрактов в РЭШ (профессор Гуриев), Harvard University (профессор Hart), Massachusetts Institute of Technology (профессоры Holmstrom, Wells), а также из учебников Salanie, Economics of contracts: A primer, Mascollel, Whinston, Green, Microeconomic Theory, Tirole, The Theory of Industrial Organization. Сборник дополняет конспекты лекций Сергея Гуриева и Андрея Сарычева. В связи с тем, что русская терминология еще не устоялась, в данном сборнике, а также в конспектах лекций и русском издании учебника Milgrom and Roberts имеют место различные переводы одних и тех же терминов. Так, например, adverse selection переводится и как "отрицательный отбор", и как "неблагоприятный отбор", moral hazard — как "оппортунистическое поведение" и "субъективный риск", и "моральный вред", incentive compatibility constraints — "ограничения совместимости стимулов" и "условия самоотбора", отсутствуют приемлемые варианты перевода терминов revelation principle и commitment.

Задача 1. *Рассмотрим следующую модель неблагоприятного отбора. Фирма нанимает на работу рабочих. Все агенты нейтральны по отношению к риску. Рабочие различаются производительностью. Издержки производства t единиц продукции рабочим типа θ равны $\theta c(t)$ ($c(0) = c'(0) = 0$, $c'(t)$, $c''(t) > 0$). Всего есть два типа рабочих — $\underline{\theta} > 0$ и $\overline{\theta} > \underline{\theta}$. Доля рабочих типа $\overline{\theta}$ равна π. Фирма предлагает рабочему контракт в виде (t, w), где t — количество произведенного товара, w — зарплата рабочего. Гарантированный уровень заработка рабочего равен 0.*

(a) *Предположим, что фирма знает тип рабочего θ. Найдите оптимальный контракт.*

(b) *Предположим теперь, что θ известно только рабочему. Найдите оптимальный контракт в этом случае. Может ли случиться так, что фирме выгодно нанимать рабочих только одного типа?*

Задача 2. *Страховая компания предлагает страхование от несчастного случая водителям автомобилей. Страховой контракт включает в себя взнос $P \geq 0$, которую водитель платит компании и страховую выплату $B \geq 0$, выплачиваемую компанией водителю, если происходит несчастный случай. Тип водителя характеризуется вероятностью несчастного случая — низкой ($\underline{\theta}$) и высокой ($\overline{\theta} > \underline{\theta}$). Потери в результате несчастного случая равны $D > 0$. Доля «плохих» водителей равна π. Функция полезности водителя: $u(x) = -e^{-ax}$. Начальное богатство водителей равно 0.*

(a) *Предположим, что тип водителя известен компании. Найдите оптимальный контракт для каждого типа.*

(b) *Предположим теперь, что тип водителя неизвестен компании. Запишите задачу компании. Охарактеризуйте оптимальный контракт в этом случае. Сравните его с контрактом, полученным в пункте (a). В каких случаях компания предложит водителям разные контракты?*

Задача 3. *Рассмотрим случай страхования автомобилей, при котором усилия агента могут влиять на распределение ущерба от несчастного случая x. Обозначим через $s(x)$ потребление агента за вычетом ущерба от несчастного случая, то есть выигрыш агента равен $s(x) - c(e)$ (e — уровень усилий). Страховая компания при этом получает $-x - s(x)$. Предположим, что распределение величины x устроено следующим образом: $f(0, e) = 1 - p(e)$, $f(x, e) = p(e)g(x)$, при $x > 0$. Здесь $p(e)$ — вероятность несчастного случая в случае, когда прикладывается усилие e, p — убывающая выпуклая функция.*

(a) *Выполнено ли в данном случае условие монотонности отношения правдоподобия (МОП)?*

(b) *Найдите оптимальную политику страховой компании.*

Задача 4. *Нейтральный по отношению к риску начальник нанимает не склонного к риску подчиненного. Агент выбирает уровень усилий a, не наблюдаемый начальником. В результате деятельности агента начальник получает один из n возможных уровней прибыли $q_1 < q_2 < \cdots < q_n$, где вероятность реализации q_i равна $\pi_i(a)$. Начальник* *предлагает подчиненному контракт $I_1, \ldots, I_n$. Ожидаемая полезность агента в случае, если он не примет предложение начальника, равна $\overline{u}$, его функция полезности*

$$u(I, a) = -e^{-r(I-a)}.$$

(a) *Покажите, что оптимальный уровень усилий не зависит от $\overline{u}$.*

(b) *Покажите, что оптимальный (second best) уровень усилий не зависит от $\overline{u}$.*

(c) *Покажите, что оптимальный контракт можно записать в виде $\hat{I}_1+k, \ldots, \hat{I}_n+k$, где k является функцией, зависящей только от $\overline{u}$ (I_i от $\overline{u}$ не зависят).*

Пусть теперь функция полезности агента равна $V(I)-a$, где $V' > 0$ и $V'' < 0$. Какие результаты из перечисленных выше в (a)—(c) останутся справедливыми? Поясните ответ. Если какой-нибудь результат неверен, приведите пример.

Задача 5. *Рассмотрим группу, состоящую из N агентов. Агент i производит выпуск x_i, при этом он терпит издержки $a_i x_i^2/2$. $a_i \geq 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Общий уровень выпуска при этом составляет $x = \sum_{i=1}^{N} x_i$.*

(a) *Найдите безусловно оптимальный уровень усилий каждого агента.*

(b) *Предположим, что индивидуальный выпуск ненаблюдаем, и платежи агентам зависят только от общего выпуска x. Предположим также, что агенты согласились делить общий выигрыш согласно линейному механизму, который дает агенту i $f_i(x) = \alpha_i x + \beta_i$, где $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ и $\sum_{i=1}^{N} \beta_i = 0$. Найдите оптимальный линейный контракт α_i и β_i и сравните общественное благосостояние с безусловным оптимумом.*

Задача 6. *[MWG] Предположим, что существует всего два типа потребителей продукта некоей фирмы, θ_H и θ_L. Доля потребителей типа θ_L равна λ. Уровень полезности потребителя типа θ, получившего x единиц товара и заплатившего T, равна $u(x, T) = \theta v(x) - T$, где*

$$v(x) = \frac{1-(1-x)^2}{2}.$$

Фирма является монополистом на рынке. Ее издержки при производстве единицы продукции равны $c > 0$.

(a) *Рассмотрите задачу недискриминирующего монополиста. Выведите его оптимальную ценовую политику. Покажите, что он обслуживает всех потребителей, если либо θ_L либо λ «достаточно велики».*

(b) *Рассмотрите монополиста, который может различить потребителей разных типов, но может только предложить простую цену p_i каждому типу θ_i. Найдите оптимальные цены.*

(c) *Пусть монополист не может различить потребителей разных типов. Предполагая, что монополист обслуживает оба типа потребителей, найдите оптимальный двухчастный тариф (F, p), где F — паушальная часть тарифа, которая взимается независимо от количества приобретенного товара, p — цена единицы товара. Объясните полученный результат. При каких условиях монополист обслуживает оба типа потребителей?*

(d) *Найдите полностью оптимальный нелинейный тариф. Сравните количество потребляемого товара с уровнем, полученным в пунктах (a)—(c).*

Задача 7. *[MWG] «Air Shangri-la» является единственной авиакомпанией, которой разрешены перевозки между островами Шангри-ла и Нирвана. Существует только два типа пассажиров: туристы и бизнесмены. Бизнесмены готовы платить за билет больше, чем туристы. Авиакомпания не может в точности сказать, кто покупает билет — турист или бизнесмен. Все пассажиры не любят покупать билеты на самолет заранее.*

Уровень полезности пассажира, купившего билет по цене P за W дней до полета равна

$$\text{Для бизнесменов:} \quad v - \theta_B P - W,$$
$$\text{Для туристов:} \quad v - \theta_T P - W,$$

где $0 < \theta_B < \theta_T$. (Заметим, что при любом фиксированном W бизнесмены готовы заплатить за билет больше, чем туристы.)

Доля туристов среди пассажиров равна λ. Издержки по перевозке одного пассажира равны c.

(a) *Нарисуйте кривые безразличия обоих типов пассажиров в пространстве (P, W). Нарисуйте кривые постоянной прибыли авиакомпании. Сформулируйте математически задачу оптимальной ценовой дискриминации. [Указание: Используйте неотрицательность цен как ограничение, так как если компания назначит отрицательную цену билета, то спрос на билеты будет бесконечным.]*

(b) *Покажите, что в оптимуме туристам безразлично, покупать билет или не лететь совсем.*

(c) *Покажите, что в оптимуме бизнесмены никогда не покупают билеты заранее, и им безразлично, каким тарифом (своим или туристическим) пользоваться.*

(d) *Опишите дискриминационную схему, предположив, что обслуживаются пассажиры обоих типов. Как она зависит от параметров задачи (λ, θ_B, θ_T, c)?*

(e) *При каких условиях авиакомпания будет обслуживать только бизнесменов?*

Задача 8. *Есть два состояния природы: благоприятное G и неблагоприятное B. В благоприятном состоянии начальник получает прибыль $\pi > 0$, в неблагоприятном — 0. Агент может повлиять на вероятность благоприятного состояния $p \in [0, 1]$. Издержки агента равны $C(p)$, где $C(0) = 0$, $C(1) = \infty$, $C'(0) = 0$, C — возрастающая выпуклая функция. Начальник наблюдает исход (G или B), но не наблюдает уровень усилий подчиненного, поэтому контракт имеет вид (W_G, W_B). Гарантированный уровень полезности агента равен 0. И начальник и подчиненный нейтральны по отношению к риску.*

(a) *Решите задачу начальника и найдите (second-best) контракт.*

(b) *Найдите оптимальный для общества уровень усилий агента. Сравните с уровнем усилий в пункте (a).*

(c) *Предположим, что агент беден, то есть выплачиваемая зарплата W_i не может быть отрицательной. Найдите оптимальный контракт и сравните уровень усилий с пунктами (a) и (b).*

Задача 9. *[Holmström] Рассмотрим задачу начальник—подчиненный с двумя возможными уровнями усилий. Если агент прикладывает высокий уровень усилий, выигрыш начальника x распределен на $[0,2]$ и имеет функцию распределения $F_H(x) = x/2$. Если агент прикладывает низкий уровень усилий, выигрыш начальника x распределен на $[0,1]$ и имеет функцию распределения $F_L(x) = x$. Издержки высокого уровня усилий равны c, в то время, как низкий уровень усилий не стоит ничего. Функция полезности агента аддитивна по зарплате и издержкам ($U(w,c) = u(w) - c$). Полезность зарплаты такова:*

$$u(w) = 1 - e^{-w},$$

гарантированный уровень полезности равен 0.

(a) *Найдите оптимальный уровень усилий в случае, когда уровень усилий подчиненного верифицируем.*

(b) *Решите задачу начальника, найдите оптимальный контракт и сравните уровень усилий с пунктом (a)*

Задача 10. *Рассмотрим задачу начальник—подчиненный в которой обе стороны нейтральны по отношению к риску. Агент реализует проект, который приносит начальнику выигрыш x, принимающий одно из двух значений $x_1 > x_0 = 0$. Ненаблюдаемые усилия агента влияют на вероятность выпадения x_1. Эта вероятность принимает одно из двух значений p_H или p_L, где $0 < p_L < p_H < 1$. Если агент выбирает высокий уровень усилий, то он терпит издержки c, распределенные на отрезке $[0, x_1]$ с функцией распределения $F(c)$. Издержки низкого уровня усилий равны нулю. Агент ограничен в средствах, то есть его зарплата должна быть неотрицательной ($w \geq 0$).*

(a) *Предположим, что агент не знает величину c до момента принятия предложения начальника и до момента выбора уровня усилий p. Найдите оптимальный контракт.*

(b) *Пусть теперь агент наблюдает c перед выбором действия p, но после подписания контракта. Переформулируйте и решите задачу начальника в этом случае, предположив, что подчиненный обязан остаться в фирме независимо от уровня c. Считайте, что c равномерно распределено на отрезке $[0, x_1]$.*

(c) *Предположим, что в пункте (b) начальник может включить в контракт условие, согласно которому агент может уйти после того, как он узнает c. Переформулируйте и решите задачу начальника.*

Задача 11. *Начальник, нейтральный по отношению к риску нанимает нейтрального по отношению к риску подчиненного. Начальник предлагает контракт, основанный на выпуске x, который является функцией, зависящей от типа агента и его усилий: $x = \theta a$. Ни тип $\theta \in [0,1]$, ни уровень усилий $a \geq 0$, не наблюдаемы начальником. Априори начальнику известно, что тип агента равномерно распределен на $[0,1]$. Издержки агента от приложения усилий равны $c(a) = a^2/2$.*

(a) *Найдите оптимальный уровень усилий (и участия) для каждого типа.*

(b) *Начальник предлагает подчиненному контакт $w(x)$ — зарплата как функция выпуска. Запишите условия самоотбора и условия индивидуальной рациональности агентов. Какой контракт позволяет реализовать оптимальный уровень усилий (и участия) для каждого типа.*

(c) *Сформулируйте максимизационную задачу начальника. Является ли контракт из пункта (b) оптимальным для начальника? Докажите оптимальность или приведите контрпример, если это не так.*

Задача 12. *Нейтральный по отношению к риску начальник нанимает на работу не склонного к риску подчиненного с функцией полезности $\sqrt{I} - a$, где I — доход, и a — уровень усилий. Агент может работать честно ($a = 2$) или лениться ($a = 1$). Есть только два возможных уровня дохода начальника: $q_1 = 40$ или $q_2 = 100$, причем если агент работает честно, то вероятность q_2 равна $3/4$, в то время, как если агент ленив, то вероятность q_2 равна $1/2$. Гарантированный уровень полезности агента равен 4.*

(a) *Сформулируйте задачу в случае, когда действия агента наблюдаемы, и найдите оптимальный уровень усилий.*

(b) *Сформулируйте задачу в случае, когда начальник не может наблюдать действие подчиненного, и найдите оптимальный уровень усилий и оптимальный контракт.*

Задача 13. *Рассмотрим стандартную модель сигнализирования (signalling). Покажите, что в этой модели существует два типа полуразделяющих равновесий:*

(a) *Равновесия, в которых $\underline{\theta}$ выбирают уровень образования $\underline{e}$, а $\overline{\theta}$ выбирают между $\underline{e}$ и более высоким уровнем $\overline{e}$.*

(b) *Равновесия, в которых $\overline{\theta}$ выбирают уровень образования $\overline{e}$, а $\underline{\theta}$ выбирают между $\overline{e}$ и более низким уровнем $\underline{e}$.*

Задача 14. *Рассмотрим задачу начальник—подчиненный, в которой подчиненный может прикладывать двумерные усилия a_1, a_2. Издержки выпуклы и квадратичны $C = \frac{1}{2}(c_{11}a_1^2 + c_{22}a_2^2 + 2c_{12}a_2a_2)$. Начальник может предлагать линейные контракты, зависящие от двух переменных: $x_1 = a_1 + \gamma a_2 + \varepsilon_1$ и $x_2 = a_2 + \varepsilon_2$. Здесь ε_1 и ε_2 независимые нормальные величины с нулевым средним и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Функция полезности агента является CARA функцией, т. е. максимизирует $CE = \mu - \frac{r}{2}\sigma^2$, где μ и σ^2 — среднее и дисперсия разности его зарплаты и издержек усилий соответственно. Условие индивидуальной рациональности агента выглядит следующим образом: $CE \geq \bar{u}$. Выигрыш начальника равен $x_1 + x_2$. Начальник нейтрален по отношению к риску.*

(a) *Найдите безусловный оптимум.*

(b) *Охарактеризуйте условно оптимальный линейный контракт.*

(c) *Предположим, что* $c_{12} = \gamma = 0$. *Найдите условно оптимальный линейный контракт.*

(d) *Предположим, что* ε_1 *ненаблюдаемо* ($\sigma_1^2 = \infty$). *Найдите условно оптимальный линейный контракт. Как он изменяется в зависимости от* c_{12} *and* γ*?*

(e) *Предположим теперь, что* ε_2 *ненаблюдаемо* ($\sigma_2^2 = \infty$). *Найдите условно оптимальный линейный контракт. Как он изменяется в зависимости от* c_{12} *and* γ*?*

(f) *Интерпретируйте результаты. приведите экономический пример.*

Задача 15. *Рассмотрим ситуацию, в которой оценки товара* θ_a *и* θ_b *двумя агентами (A и B), нейтральными по отношению к риску, являются случайными величинами, равномерно распределенными на* $[0, 1]$. *Изначально каждый агент обладает одной единицей товара. Встретившись, агенты решают заключить сделку: каждый агент может остаться с 0, 1 или 2 единицами товара (другой агент соответственно остается с 2, 1 или 0 единицами).*

(a) *Охарактеризуйте правило торговли, эффективное ex post (т. е. распределение товара и множество цен как функцию от оценок товара).*

(b) *Рассмотрим механизм, в котором оба агента подают заявки одновременно, и сделавший более высокую заявку покупает товар у другого агента по цене наиболее высокой заявки. Найдите симметричное равновесие Байеса-Нэша в котором заявки линейны по оценкам товара* $b_i = \alpha_i + \beta_i\theta_i$, $i = a, b$. *Выведите условия первого порядка в задаче каждого агента. (Симметрия означает, что равновесные заявки одинаковы для обоих агентов как функции.)*

(c) *Какое распределение товаров реализуется с помощью этого механизма? Является ли оно совместимым со стимулами по Байесу? Является ли оно эффективным ex post? Является ли оно индивидуально рациональным? Как соотносятся полученные результаты с теоремой Майерсона—Саттертуэйта?*

Задача 16. *Рассмотрим задачу начальник—подчиненный, в которой оба участника нейтральны по отношению к риску. Агент предпринимает проект, приносящий начальнику денежный доход* x, *который принимает одно из двух значений:* $x_1 > x_0 = 0$. *Ненаблюдаемые усилия агента влияют на вероятность* x_1. *Возможные значения* p *равны* p^H *и* p^L, *где* $0 < p^L < p^H < 1$. *Издержки агента равны нулю, если он выбирает* p^L, *и распределены на* $[0, x_1]$ *с функцией распределения* $F(c)$, *если он выбирает* p^H. *Гарантированный уровень полезности агента равен нулю. Зарплата агента должна также удовлетворять условию ограниченной ответственности:* $w \geq 0$.

(a) *Предположим, что агент не наблюдает* c *перед тем, как принять предложение начальника и выбрать действие* p. *Охарактеризуйте условно оптимальный контракт.*

(b) *Теперь предположим, что агент может наблюдать* c *перед тем, как выбрать* p, *но после подписания контракта. Переформулируйте и решите задачу начальника при данных условиях, предполагая, что агент не может разорвать контракт независимо от* c. *Может ли этот условно оптимальный контракт при некоторых значениях параметров быть безусловно оптимальным?*

(c) *Предположим теперь, что в (b) начальник может включать в контракт пункт, согласно которому агент выходит из фирмы после того, как узнает c. Переформулируйте и решите задачу начальника.*

Задача 17. *Монополист предлагает услуги a и b потребителям с линейной функцией полезности:* $U(a,b) = \theta^a a + \theta^b b$. *Услуга может либо быть предоставлена, либо нет, то есть a и b бинарные переменные. Оценки услуг потребителями* θ^a *и* θ^b *являются их частной информацией и равномерно распределены на* $[0,1] \times [0,1]$. *Издержки производства единицы каждого продукта равны c. Гарантированный уровень полезности потребителей равен нулю.*

(a) *Найдите безусловный оптимум.*

(b) *Охарактеризуйте оптимальный контракт при условии асимметричной информации настолько полно, настолько это возможно.*

Задача 18. *Предприниматель E хочет организовать консалтинговую фирму. У E есть специфический человеческий капитал, но ему нужен также офис и компьютер. Компьютер стоит c и служит один период времени. Офис стоит d и служит два периода (через один период офис можно продать за* $d/2$*). Если офис и компьютер приобретены, E производит доход* y_1 *за первый период и* y_2 *за второй период. Начальное богатство E равно* $w < c+d$. *Чтобы начать дело, E просит кредитора C предоставить заем на условиях стандартного долгового контракта: если E не выплатит указанные платежи* P_1 *и* P_2*, C берет под контроль все физические активы фирмы. Найдите, при каких w можно достичь безусловного оптимума.*

Задача 19. *Предложите модель, рационализирующую следующую историю. Владелец театра Роз мистер Пенслоу (P) занял x фунтов стерлингов у мистера Феннимана для финансирования новой пьесы своего любимого драматурга мистера Шекспира (S). Контракт является стандартным долговым контрактом: если занятые деньги не вернуть кредитору, F получает контроль над театром. Это означает, в частности, что F получит право выбора репертуара театра, а именно может заказать драматургу написать либо комедию, либо трагедию. Комедии Шекспира очень хорошо принимаются публикой. Про трагедии нельзя сказать, что они непременно менее популярны. При этом известно, что они очень хорошо принимаются театральными критиками. Как S, так и P являются людьми небогатыми с одной стороны и предпочитают деньгам успех у критиков с другой стороны. Сможет ли P финансировать трагедию/комедию при помощи займа у F? Предположим, что S может дать F небольшую роль (например, одного из аптекарей) в пьесе (издержки при этом очень незначительны), так что F также будет получать удовольствие от успеха у критиков. Будет ли S делать это? Поможет ли это финансировать трагедию? Можно ли финансировать две трагедии? Комедию и трагедию?*

Задача 20. *Покупатель B хочет приобрести единицу сырья у продавца S. Оба могут вкладывать специфические инвестиции. Инвестиции бинарны: каждый участник может либо ничего не делать, либо инвестировать 1.9 в будущие выгоды от торговли. Ex post оценка покупателем товара v и издержки производства c следующие:*

$$\begin{array}{lll} & \beta = 0 & \beta = 1.9 \\ \sigma = 0 & v = 6,\, c = 10 & v = 9,\, c = 7 \\ \sigma = 1.9 & v = 9,\, c = 7 & v = 10,\, c = 6 \end{array} \tag{1}$$

(a) *Найдите безусловно оптимальный уровень инвестиций. Могут ли участники достичь его, если на β и σ можно написать контракт? Если только на v и c можно написать контракт?*

(b) *Предположим, что единственная верифицируемая переменная — решение B о том, принимать товар или нет. Можно ли в этом случае достичь безусловного оптимума? Напишите оптимальный контракт (p_0, p_1).*

Задача 21. *Рассмотрим торговлю между покупателем B и продавцом S. При $t = 0$ B и S подписывают контракт. При $t = 1/2$ продавец инвестирует $\sigma \in [1, \Sigma]$. При $t = 1$ S продает B q единиц товара. Функция полезности покупателя линейна по количеству приобретенного товара: $V(q) = q$. Издержки производства равны $C(q) = q^2/(2\sigma\theta)$, где θ — состояние мира, распределенное на $[0, 1]$ с функцией распределения $F(\theta) = \theta^2$. Издержки инвестиций равны $\alpha\sigma$, где $\alpha < 1/3$.*

(a) *Найдите безусловно оптимальные количество продаваемого товара и уровень инвестиций.*

(b) *Что произойдет, если участники не могут написать долгосрочного контракта (предположите, что выигрыш делится согласно тóрговому решению Нэша)?*

(c) *Предположим, что участники могут написать долгосрочный контракт следующего вида: «S поставляет B $\bar{q}$ единиц товара в обмен на $\bar{p}$ долларов». Является ли этот контракт устойчивым по отношению к взаимному пересмотру? Найдите уровень инвестиций и ожидаемое богатство, если такой контракт нельзя пересматривать (или очень дорого). Найдите $\bar{q}$, максимизирующее общее богатство.*

(d) *Предположим, что участники могут гарантировать то, что будет продано не менее q_0 единиц товара: суд может проверить, что q_0 единиц поставлено, и везти их обратно слишком дорого. Потом при $t = 1$ участники могут пересмотреть контракт и назначить новую цену и количество $q \geq q_0$. Найдите уровень инвестиций и ожидаемое общее богатство при данном q_0. Найдите q_0, максимизирующее общее богатство.*

(e) *Сравните (d) и (c). Для каких значений α и Σ (d) лучше, чем (c)?*

Задача 22. *Аукцион наименьшей цены устроен следующим образом. Продавец продает единицу товара одному из n покупателей. Покупатели подают заявки, и продавец отдает товар агенту с наибольшей заявкой, который платит наименьшую из указанных в заявках сумм. Оценки покупателями товара θ_i независимы и распределены равномерно на $[0, 1]$.*

(a) *Охарактеризуйте симметричное равновесие Байеса-Нэша.*

(b) *Найдите ожидаемый доход продавца.*

(c) *Сравните (a) и (b) со случаем аукциона второй цены. Как полученные результаты соотносятся с теоремой о равенстве дохода.*

(d) *Если (a)—(c) кажутся слишком сложными в общем случае, решите для $n = 3$.*

Задача 23. *Рассмотрим ситуацию, в которой оценки товара θ_a и θ_b двумя агентами (A и B), нейтральными по отношению к риску, являются случайными величинами, равномерно распределенными на $[0, 1]$. Изначально каждый агент обладает одной единицей товара. Встретившись, агенты решают заключить сделку: каждый агент может остаться с 0, 1 или 2 единицами товара (другой агент соответственно остается с 2, 1 или 0 единицами).*

(a) *Охарактеризуйте правило торговли, эффективное ex post (т. е. распределение товара и множество цен как функцию от оценок товара).*

(b) *Рассмотрим механизм, в котором оба агента подают заявки одновременно, и сделавший более высокую заявку покупает товар у другого агента по цене наиболее высокой заявки. Найдите симметричное равновесие Байеса-Нэша в котором заявки линейны по оценкам товара $b_i = \alpha_i + \beta_i\theta_i$, $i = a, b$. Выведите условия первого порядка в задаче каждого агента. (Симметрия означает, что равновесные заявки одинаковы для обоих агентов как функции.)*

(c) *Какое распределение товаров реализуется с помощью этого механизма? Является ли оно совместимым со стимулами по Байесу? Является ли оно эффективным ex post? Является ли оно индивидуально рациональным? Как соотносятся полученные результаты с теоремой Майерсона—Саттертуэйта?*

Задача 24. *Начальник, нейтральный по отношению к риску нанимает нейтрального по отношению к риску подчиненного. Начальник предлагает контракт, основанный на выпуске x, который является функцией, зависящей от типа агента и его усилий: $x = \theta a$. Ни тип $\theta \in [0, 1]$, ни уровень усилий $a \geq 0$, не наблюдаемы начальником. Априори начальнику известно, что тип агента равномерно распределен на $[0, 1]$. Издержки агента по прикладыванию усилий равны $c(a) = a^2/2$.*

(a) *Найдите оптимальный уровень усилий (и участия) для каждого типа.*

(b) *Начальник предлагает подчиненному контакт $w(x)$ — зарплата как функция выпуска. Запишите условия самоотбора и условия индивидуальной рациональности агентов. Какой контракт позволяет реализовать оптимальный уровень усилий (и участия) для каждого типа.*

(c) *Сформулируйте максимизационную задачу начальника. Является ли контракт из пункта (b) оптимальным для начальника? Докажите оптимальность или приведите контр-пример, если это не так.*

Задача 25. *Фирма обслуживает два типа потребителей: H и L. Функция полезности потребителей типа H равна $\theta^H u(x) - r$, где x — количество потребленного товара, а r — уплаченные за товар деньги. Полезность агентов типа L равна $\theta^H u(x) - r$, где $\theta^L < \theta^H$. Уровень гарантированной полезности агентов типа H равен $\underline{u}^H$, в то время, как для агентов типа L он равен $\underline{u}^L < \underline{u}^H$. Издержки производства единицы продукции равны c, доля потребителей типа L равна π.*

(a) *Охарактеризуйте безусловный оптимум в данной задаче.*

(b) *Охарактеризуйте оптимальное решение при условии, что фирма не может различить потребителей разных типов.*

Задача 26. *Банк обладает единицей капитала и рассматривает возможность одолжить ее фирме под банковский процент r. Фирма использует эту единицу для финансирования неделимого инвестиционного проекта. Доход от проекта R наблюдаем ex post, но неизвестен ex ante и равномерно распределен на интервале $[\bar{R}-\theta, \bar{R}+\theta]$. Уровень рискованности θ является частной информацией фирмы. Предварительно фирма оставляет в банке залог C, который банк оставляет себе, если дохода недостаточно, чтобы выплатить заем вместе с процентами. (Указание: фирма получает $\max\{R-r, -C\}$, банк получает $\min\{r, R+C\}$). Тип фирмы θ принимает значение θ_1 с вероятностью π и θ_2 с вероятностью $1-\pi$. И банк и фирма нейтральны по отношению к риску. Величины $\bar{R}$, C, и π заданы экзогенно.*

(a) *Найдите безусловный оптимум, то есть вычислите процент, который банк предложил бы фирме, если бы θ была известна. Найдите выигрыш банка.*

(b) *Для данного r найдите, какие фирмы будут занимать у банка.*

(c) *Найдите шкалу банковских процентов, которая является оптимальной для банка в случае асимметричной информации. (Указание: рассмотрите ситуацию, в которой допускается кредитное рационирование, то есть предлагая несколько вариантов банковского процента, банк ограничивает количество фирм, занимающих под некоторые из них, так что некоторые фирмы, которые хотели бы занять под низкий процент, оказываются рационированными.*

Задача 27. *Есть два агента — продавец (1) и покупатель (2). Изначально продавец владеет единицей товара, которая ценится агентами как θ_1 и θ_2 соответственно. Ex ante θ_1 равномерно распределено на $[0, 1]$, в то время, как θ_2 равномерно распределено на $[a, 1+a]$, где $a \in (0, 1)$.*

(a) *Предполагая, что оценки агентов известны публично, найдите ожидаемый уровень богатства.*

(b) *Теперь предположим, что оценки агентов являются их частной информацией. Найдите условно оптимальный механизм, то есть механизм, который максимизирует ожидаемый уровень богатства при выполнении условий самоотбора и индивидуальной рациональности. Сравните с (a).*

Задача 28. *Предприниматель E хочет начать проект. У E есть специфический человеческий капитал, но ему нужны также офис и компьютер. Компьютер стоит c и служит один год. Офис стоит d и служит два года (через год офис можно продать за $d/3$). Если офис и компьютер приобретены, E производит доход y_1 за первый год и y_2 за второй год. Начальное богатство E равно $w < c + d$. Чтобы начать дело, E просит кредитора C предоставить заем на условиях стандартного долгового контракта: если E не выплатит указанные платежи P_1 и P_2, C берет под контроль все физические активы фирмы. C может неограничено занимать на кредитном рынке под процент r. Найдите, при каких w можно достичь безусловного оптимума.*

Задача 29. *Покупатель B хочет приобрести единицу сырья у продавца S. Оба могут вкладывать специфические инвестиции. Инвестиции бинарны: каждый участник может либо ничего не делать, либо инвестировать в будущие выгоды от торговли. Издержки производства случайны:*

$$c = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \sigma, \\ 3, & \text{с вероятностью } 1-\sigma, \end{cases}$$

где σ — инвестиции S, издержки от которых равны σ^2. Аналогично, оценка покупателем товара равна

$$c = \begin{cases} 4, & \text{с вероятностью } \beta, \\ 2, & \text{с вероятностью } 1-\beta. \end{cases}$$

Издержки инвестиций B равны β^2.

(a) *Найдите безусловно оптимальный уровень инвестиций.*

(b) *Опишите, что произойдет в случае отсутствия интеграции, интеграции «снизу-вверх», интеграции «сверху-вниз». Сравните общественное благосостояние и найдите, какой случай наиболее эффективный.*

Задача 30. *Рассмотрим торговлю между покупателем B и продавцом S. При $t = 0$ B и S подписывают контракт. При $t = 1/2$ продавец инвестирует $\sigma \geq 0$. При $t = 1$ S продает B единицу товара. Функция полезности покупателя равна $\theta\sigma$, где θ — состояние мира, равномерно распределенное на $[0, A]$. Издержки производства равны c. Издержки инвестиций равны σ^2.*

(a) *Найдите безусловно оптимальное количество продаваемого товара и уровень инвестиций.*

(b) *Что произойдет, если участники могут написать контракт фиксированной цены (т. е. B платит p_1, если товар поставлен, и p_0 иначе). Найдите оптимальные p_0 и p_1.*

(c) *Можно ли достичь безусловного оптимума с помощью option контракта? Охарактеризуйте оптимальный option контракт.*

Задача 31. *Рассмотрим следующую модель начальник—подчиненный, в которой оба агента нейтральны по отношению к риску. Начальник максимизирует $E\{x - w(x)\}$, подчиненный максимизирует $E\{w(x) - C(a)\}$, где $C(a)$ — издержки усилий агента, $a \in [0, 1]$, $C'(a) > 0$, $C''(a) > 0$, $C'(0) = 0$, $C'(1) = \infty$. Доход начальника x принимает одно из двух значений: X с вероятностью a и 0 с вероятностью $1-a$. Гарантированный уровень полезности агента равен нулю.*

(a) *Найдите безусловно оптимальный уровень усилий a^*, то есть уровень усилий, максимизирующий общественное богатство.*

(b) *Предположим, что начальник не наблюдает усилия агента a и может предлагать контракт только вида $w(x)$. Найдите оптимальный контракт. Сравните уровень усилий с безусловно оптимальным a^*.*

(c) *Предположим, что агент не имеет изначально никаких денег, то есть контракт должен удовлетворять условию $w(x) \geq 0$. Найдите оптимальный контракт и сравните уровень усилий с безусловно оптимальным a^*.*

Задача 32. *Рассмотрим задачу начальник—подчиненный, в которой начальник нейтрален по отношению к риску, а агент отрицательно относится к риску. Агент выбирает действие $a \in (-\infty, +\infty)$. Начальник наблюдает $x \in \mathbb{R}$.*

(a) *Предложите пример технологии $f(x, a)$, которая удовлетворяет как условию монотонности отношения правдоподобия (МОП), так и условию выпуклости функции распределения (ВФР).*

(b) *Предложите пример технологии $f(x, a)$, которая удовлетворяет как условию МОП, так и строгому условию ВФР, то есть $F(x, a)$ строго выпукла по a.*

Задача 33. *Рассмотрим двухпериодную задачу отрицательного отбора. Полезность агента от q единиц товара равна $\theta q - t$, где t — сумма, уплаченная за товар, и $\theta = \{\underline{\theta}, \overline{\theta}\}$. Вероятность того, что $\theta = \underline{\theta}$ равна π. $\overline{\theta}$ больше, чем $\underline{\theta}$: $\overline{\theta}/\underline{\theta} < 1/(1 - \pi)$. Издержки производства равны $q^2/2$. Дисконт равен нулю.*

(a) *Найдите безусловный оптимум.*

(b) *Найдите условный оптимум в однопериодной модели.*

(c) *Предположим, что объявив в первом периоде стратегию, начальник не может от нее отклониться во втором периоде (Salanie, Ch.6). Охарактеризуйте условно оптимальный контракт в двухпериодной модели.*

(d) *Охарактеризуйте оптимальный контракт, устойчивый по отношению к взаимному пересмотру (достаточно найти условия первого порядка).*

Задача 34. *Рассмотрим торговлю между двумя агентами: покупателем B и продавцом S. Оценка покупателем товара θ^b принимает значение $1 + \alpha + \beta$ с вероятностью x и α с вероятностью $1 - x$. Оценка продавцом товара принимает значение 0 с вероятностью y и $1 + \alpha$ с вероятностью $1 - y$. При $t = 0$ агенты подписывают контракт. При $t = 1$ каждый агент может вложить инвестиции: B инвестирует в x, S инвестирует в y. Издержки инвестиций равны x^2 и y^2 соответственно. при $t = 2$ агенты наблюдают оценки друг друга и могут торговать.*

(a) *Охарактеризуйте безусловно оптимальные уровни x и y и полученное общественное богатство.*

(b) *Предположим, что переговоры ex post происходят согласно то́рговому решению Нэша. Найдите x и y и сосчитайте богатство.*

(c) *Предположим, что участники могут написать долгосрочный контракт торговать по цене p, который не может быть нарушен односторонним образом, но может быть пересмотрен обеими сторонами. Найдите x и y и сосчитайте богатство в зависимости от p. Найдите p, максимизирующее богатство.*

(d) *Предположим, что B покупает S и, следовательно, присваивает себе весь ex post выигрыш. Найдите x и y и сосчитайте богатство.*

(e) *Предположим, что S покупает B и, следовательно, присваивает себе весь ex post выигрыш. Найдите x и y и сосчитайте богатство.*

(f) *Для всех значений $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,1]$ сравните богатство в пунктах (b)—(d) и охарактеризуйте значения параметров α и β, при которых выгодна интеграция.*

Задача 35. *Рассмотрим торговлю между двумя агентами, как в статье Харта и Мура (1988). Оценки покупателем и продавцом товара равны $v = 2+18x\beta$ и $c = 20-18y\sigma$ соответственно. Здесь β и σ — ненаблюдаемые инвестиции B и S, вложенные при $t = 1/2$, v и c симметрически наблюдаемы, x и y являются случайными переменными, равномерно и независимо распределенными на $[0,1]$. Инвестиции дискретны: $\beta,\sigma = \{0,1\}$. Издержки инвестиций равны β и σ. Торговля бинарна, то есть $q = \{0,1\}$.*

(a) *Найдите безусловно оптимальный уровень торговли для всех β, σ, x, y.*

(b) *Найдите безусловно оптимальный уровень инвестиций.*

(c) *Предположим, что участники заключили контракт фиксированной цены p^0, p^1. Найдите условно оптимальный контракт фиксированной цены.*

(d) *Предположим, что поставка товара верифицируема. Найдите option контракт, который реализует безусловный оптимум. (Предположите, что покупателю принадлежит вся тóрговая сила.)*

Задача 36. *Рассмотрим торговлю с непрерывным q. Существует два возможных состояния мира: хорошее с вероятностью π и плохое с вероятностью $1-\pi$. В хорошем состоянии издержки производства равны $\theta_g C(q,\sigma)$, в то время, как в плохом состоянии они равны $\theta_b C(q,\sigma)$, где $\theta_b > \theta_g > 0$. Здесь σ — издержки продавца на инвестиции. Оценка товара покупателем не зависит от состояния и равна $V(q)$. Предположим, что $V_q > 0$, $C_q > 0$, $V_{qq} < 0$, $C_{qq} > 0$, $C_\sigma < 0$, $C_{q\sigma} < 0$. Переговорная сила продавца равна $\gamma \in (0,1)$.*

(a) *Найдите безусловно оптимальный уровень торговли в каждом состоянии, считая уровень инвестиций продавца σ заданным. В каком состоянии он больше?*

(b) *Охарактеризуйте безусловно оптимальный уровень инвестиций.*

(c) *Предположим, что суд не может наблюдать поставку товара. Найдите оптимальный контракт.*

(d) *Предположим, что поставка наблюдаема. Могут ли участники реализовать безусловный оптимум?*

Задача 37. *Рассмотрим задачу торговли с кросс-инвестициями и верифицируемым ценовым индексом $p(\omega)$, таким, что при всех ω*

$$c(\beta,\sigma,\omega) < p(\omega) < v(\beta,\sigma,\omega).$$

Здесь β, σ — инвестиции покупателя и продавца соответственно (перенормированные в терминах издержек). $E\{v(\beta,\sigma,\omega)-p(\omega)\} = b_0+(1-\gamma)\sqrt{2\beta}+\gamma\sqrt{2\sigma}$, $E\{p(\omega)-c(\beta,\sigma,\omega)\} = s_0+(1-\delta)\sqrt{2\sigma}+\delta\sqrt{2\beta}$, где $b_0+s_0 = w_0 > 0$. Параметры $\gamma, \delta \in [0,1]$ измеряют кросс-эффекты, которые инвестиции каждого участника производят на оценки другого участника. Удобно ввести средний кросс-эффект $x = \frac{\gamma+\delta}{2}$ и разность кросс-эффектов $y = \delta - \gamma$. Предположим, что $y \geq 0$. Найдите уровни инвестиций и богатство при следующих условиях:

(a) *Уровни инвестиций наблюдаемы и верифицируемы.*

(b) *Индексный контракт (торговля по цене $p(\omega)$).*

(c) *Отсутствие контракта (торговля по Нэшу ex post).*

(d) *Интеграция «снизу-вверх».*

(e) *Интеграция «сверху-вниз».*

(f) *Условная собственность: покупатель владеет всем с вероятностью π, продавец — с вероятностью $1-\pi$. Найдите π, максимизирующее богатство.*

(g) *Игра со сбалансированным бюджетом, в которой переговорная сила принадлежит покупателю с вероятностью λ, продавцу — с вероятностью μ, и с вероятностью $1-\lambda-\mu$ участники торгуют по цене $p(\omega)$. Найдите λ и μ, максимизирующие богатство.*

Задача 38. *Рассмотрим динамическую модель долга, как в статье Харта и Мура (1989, 1998) (или Харт, 1995, глава 5) с вогнутой производственной функцией. При $t=0$ богатство фирмы составляет w. Банк имеет неограниченный доступ к кредитам под процент, нормализованный к нулю. Фирма может предпринять проект с неверифицируемыми доходами, равными $y_t = 2\alpha_t\sqrt{k_{t-1}}$, где y_t — доход в период $t = 1,2$, k_t — уровень капитала в конце периода t. Производительность во втором периоде выше, чем в первом ($\alpha_1 = 1 < \alpha_2 = 3$). Капитал можно покупать только в периоде 0. Амортизация устроена следующим образом: после первого периода уровень капитала равен $\Delta = 4/9$ от первоначального уровня инвестиций. После второго периода уровень капитала равен нулю. В периоде 1 тот, кто владеет правом управления предприятием, может ликвидировать любую часть оставшегося капитала, оставив только $k_1 \geq 0$ для производства y_2.*

(a) *Найдите безусловно оптимальный уровень инвестиций и ликвидации.*

(b) *Фирма и банк подписывают стандартный долговой контракт: банк занимает B фирме в нулевом периоде и требует выплатить $\hat{P}$ в первом периоде. Если фирма не платит, то право управления переходит к банку, то есть банк выбирает уровень ликвидации и получает всю ликвидационную стоимость. Предположим, что вся переговорная сила принадлежит фирме. Для каких значений w реализуется безусловный оптимум? Найдите условный оптимум для остальных значений. Как контракт $(B,\hat{P})$ зависит от w?*

Задача 39. *Есть I покупателей с независимыми оценками товара, равномерно распределенными на $[0,1]$.*

(a) *Найдите равновесие Байеса-Нэша, если единица товара продается посредством аукциона первой цены.*

(b) *Найдите равновесие Байеса-Нэша, если единица товара продается посредством аукциона второй цены.*

(c) *Сравните доход продавца в (a) и (b) для данного множества оценок $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_I$. Сравните ожидаемый доход в случае (a) и (b).*

Задача 40. *Есть два агента — продавец (1) и покупатель (2). Изначально продавец владеет единицей товара, которая ценится агентами как θ_1 и θ_2 соответственно. Ex ante θ_1 равномерно распределено на $[0,1]$, в то время, как θ_2 равномерно распределено на $[a, 1+a]$, где $a \in (0,1)$.*

(a) *Предполагая, что оценки агентов известны публично, найдите ожидаемый уровень богатства.*

(b) *Теперь предположим, что оценки агентов являются их частной информацией. Найдите условно оптимальный механизм, то есть механизм, который максимизирует ожидаемый уровень богатства при выполнении условий самоотбора и индивидуальной рациональности. Сравните с (a).*

Задача 41. *Продавец хочет продать единицу товара. Его оценка товара равна $c > 0$. Есть n покупателей, чьи оценки θ_i являются их частной информацией. Ex ante оценки покупателей независимы и распределены на $[0, \infty)$ с функцией распределения $F(\theta)$. Продавец может назначить резервную цену p, то есть если все заявки ниже p, продавец оставляет товар себе.*

(a) *Найдите резервную цену p^*, оптимальную для продавца.*

(b) *Является ли аукцион первой цены с резервной ценой p^* оптимальным аукционом? Является ли он ex post эффективным?*

(c) *Ответьте на те же вопросы для аукциона второй цены.*

(d) *Решите (a) для равномерного и экспоненциального распределения.*

Задача 42. *Задача царя Соломона (основана на Ветхом Завете, Первая Книга Царств, 3, 16—28 и Мур, 1992). К Царю Соломону обратились две женщины, утверждающие, что каждая из них является матерью ребенка. Каждая женщина знает, кто из них настоящая мать. Царь хочет реализовать следующую функцию общественного выбора: отдать ребенка настоящей матери. Царь может отдать ребенка одной из женщин или не отдавать никому (разрубить пополам). Выигрыши таковы: женщина, получившая ребенка, получает полезность, эквивалентную a талантам, другая женщина при этом получает $b < a$. Если ребенка убивают, то истинная мать страдает больше: ее полезность равна $c \ll b$, в то время, как полезность другой женщины равна d, $c < d < b$.*

(a) *Можно ли сформулированную выше функцию общественного выбора строго реализовать с помощью равновесия Нэша. Если да, то постройте механизм, реализующий ее.*

(b) *Можно ли ее строго реализовать с помощью равновесия Нэша совершенного по подыграм. Если да, то постройте механизм, реализующий ее.*

(c) *Решите (a)—(b) в предположении, что можно использовать трансферты.*

Указание: Царь Соломон не читал статью Маскина (1977) и Мура—Репулло (1988), так что механизм, описанный в Ветхом Завете может и не реализовать нужную функцию.

Задача 43. *(Основана на статье Армстронга и Роше, 1998) Рассмотрим монополию, производящую два товара, A и B. Функция полезности потребителей аддитивно сепарабельна:* $u(x^A, x^B) = t_i^A\sqrt{x^A} + t_j^B\sqrt{x^B}$, *где* $i = \{L, H\}$ *и* $j = \{L, H\}$ *обозначают тип потребителей. Пусть* $\Delta^k = t_H^k - t_L^k > 0$, $k = A, B$. *Распределение типов задано вероятностями* $\alpha_{ij} > 0$. *Издержки производства линейны* $C(x^A, x^B) = c^A x^A + c^B x^B$. *Опишите безусловно оптимальное и условно оптимальное распределения.*

Задача 44. *Покупатель B хочет приобрести единицу товара у продавца S в момент* $t = 1$. *B момент* $t = 1/2$, *S делает инвестиции* $\sigma \in [0, 1]$ *в качество товара, которые не могут быть включены в контракт. Стоимость производства товара в момент* $t = 1$ *постоянна и равна* $c = 1/2$. *B момент* $t = 1$ *B получает полезность от потребления товара, распределённую в соответствии со следующей функцией распределения* $F(v) = v + \sigma(v^2 - v)$. *Стоимость инвестиций равна* $\sigma/24$.

(a) *Найдите безусловный оптимум: оптимальную торговлю ex-post и оптимальные инвестиции ex-ante.*

(b) *Предположим, что стороны заключили контракт в момент* $t = 0$, *но договариваются о цене в момент* $t = 1$. *Что произойдёт, если вся переговорная сила принадлежит B? Если B и S обладают равной переговорной силой? Если распределение переговорной силы* $(1 - \gamma) : \gamma$?

(c) *Предположим, что переговорная сила распределена как* $(1 - \gamma) : \gamma$. *Может ли улучшить ситуацию опцион?*

Задача 45. *[Prendergast and Stole] Имеются два агента A и B и два товара: яблоки (a) и бананы (b). Агент i владеет технологией производства товара i за время* $t = 1 (i = a, b)$. *Стоимость производства равна* $\frac{1}{2}q^2$. *Проблема заключается в том, что A не любит яблоки, а B не любит бананы (функция полезности A имеет вид* $u_A(x_a, x_b) = v_A x_b$, *а функция полезности B —* $u_B(x_a, x_b) = v_B x_a$,*). Поэтому после того как товары произведены, участники ими обмениваются. Предположим, что в момент* $t = 1/2$ *стороны могут сделать инвестиции, увеличивающие их предельные полезности, которые не могут быть включены в контракт. А именно,* $v_i = (3k_i I_i)^{\frac{1}{3}}, i = A, B$, *где* I_i *— стоимость инвестиций,* k_i *— производственный параметр (чтобы получить* v_i *необходимо инвестировать* $\frac{1}{3k_i}v_i^3$*);* $k_A = \alpha, k_B = \beta$. *B момент* $t = 0$ *стороны решают использовать при обмене деньги или нет (деньги бесконечно делимы). (Стороны могут действительно отказаться от использования денег, уничтожив их физически).*

(a) *Безусловный оптимум. Найдите инвестиции I_A, I_B и уровень производства q_a, q_b которые максимизируют благосостояние в момент $t = 0$ (полезность потребления минус стоимость инвестиций и производства).*

(b) *Денежный обмен. При фиксированных v_A, v_B найдите решение по Нэшу если агенты могут использовать деньги (намёк: A и B торгуются по поводу q_a, q_b, T_{AB}, где T_{AB} выплачивается игроком A игроку B, и полезности равны $u_A = (v_A q_b - T_{AB} - \frac{1}{2}q_a^2), u_B = (v_B q_a + T_{AB} - \frac{1}{2}q_b^2)$).*

(c) *Натуральный обмен. При фиксированных v_A, v_B найдите решение по Нэшу если агенты не могут использовать деньги (намёк: A и B торгуются по поводу q_a, q_b, никакие платежи не возможны $T_{AB} = 0$); сравните общее благосостояние $u_A + u_B$ ex-post со случаем денежного обмена.*

(d) *Инвестиции и денежный обмен. Предполагая возможность денежного обмена в момент $t = 1$, найдите уровень инвестиций в момент $t = 1/2$ (равновесие Нэша в инвестиционной игре в момент $t = 1/2$). Рассчитайте благосостояние.*

(e) *Инвестиции при натуральном обмене. Предположим, что стороны договорились не использовать денег в момент $t = 1$ (равновесие Нэша в инвестиционной игре в момент $t = 1/2$). Рассчитайте благосостояние. При $\alpha/\beta \to 0$. Дополнительно: сравните (a) и (d) при $\alpha/\beta = 1/2$.*

(f) *Сравнивания (b) с (c), (d) и (e), что вы можете сказать по поводу денег? Эффективны ли деньги ex-post? Ex-ante эффективны? Почему?*

Задача 46. *Угольная шахта C поставляет уголь на электрическую станцию E. Стоимость производства угля равна c, электростанция получает прибыль v от использования угля. C и E расположены близко друг к другу. Электростанции дорого закупать уголь у других шахт, а для шахты невыгодно поставлять уголь на другие электростанции. Шахта может закупить оборудование, сделав инвестиций на сумму ($y = 1$). Новое оборудование позволяет производить более качественный и более дорогой уголь с издержками производства $\overline{c} > \underline{c}$. Чтобы использовать более дорогой уголь, электростанция также должна закупить новое оборудование ($x = 1$). Если инвестиции сделаны, электростанция получает большую прибыль от использования высококачественного угля $\overline{v} > \underline{v}$. Если электростанция не сделала инвестиций ($x = 0$), то нет никакой разницы, какой уголь использовать. Инвестиции наблюдаемы, но не верифицируемы. Предположим, что $\underline{v} - \underline{c} > 0$, $\overline{v} - \overline{c} > \underline{v} - \underline{c} + 2$, и существует такое p^*, что $\underline{c} < \overline{c} < p^* < \underline{v} < \overline{v}$.*

	$x = 0$	$x = 1$
$y = 0$	$v = \underline{v}, c = \underline{c}$	$v = \underline{v}, c = \underline{c}$
$y = 1$	$v = \underline{v}, c = \overline{c}$	$v = \overline{v}, c = \overline{c}$

(a) *Найдите безусловно оптимальный уровень торговли и инвестиций.*

(b) *Предположим, что x и y наблюдаемы и верифицируемы. Найдите контракт p_{xy}, который приводит к безусловному оптимуму.*

(c) *Предположим, что x может быть записан в контракт, а y - нет. Может ли быть достигнут безусловный оптимум?*

(d) *Предположим, что y может быть записан в контракт, а x - нет. Может ли быть достигнут безусловный оптимум? (Не забывайте, что контракт должен быть устойчив к пересмотру.)*

(e) *Что произойдёт, если ни x, ни y не могут быть записаны в контракт? Найдите уровень инвестиций при контракте с фиксированной ценой (когда стороны договариваются торговать по цене p^*). Сравните этот случай с ситуацией, когда не заключается никакого контракта, а о цене договариваются ex-post (предполагайте, что у сторон одинаковая переговорная сила).*