Эконометрический ликбез: непараметрический анализ

Некоторые ловушки параметрической инференции*

Майкл Крил†

Автономный Университет Барселоны, Барселона, Испания

В эссе рассмотрены некоторые нежелательные последствия, к которым приводит использование параметрических моделей без должного внимания к проверке, правильно ли они специфицированы хотя бы приблизительно. Показано, что непараметрические методы позволяют в определенной степени избежать этих проблем.

Даже несистемный обзор литературы дает понять, что параметрическое моделирование составляет бо́льшую часть прикладных эконометрических исследований, и что непараметрические методы используются относительно редко. Почему же параметрические модели так популярны? Этому есть много причин, в том числе:

(i) параметрические модели обычно довольно просты, а результаты представимы в виде удобных аналитических выражений;

(ii) параметрические модели обычно легко оценивать численно;

(iii) параметрические модели часто показывают «общую картину», даже если упускают из вида некоторые детали;

(iv) параметрические модели статистически эффективны при условии правильной спецификации.

Есть много аргументов в пользу параметрических моделей, несмотря на опасность неверной спецификации и возможность упустить из виду слишком много деталей. Почему непараметрические модели являются относительно непопулярными? В голову приходит несколько причин:

(i) непараметрические модели зачастую приводят к результатам в виде сложных выражений, часть которых может не иметь явного экономического смысла;

(ii) непараметрические модели основываются на более слабых предпосылках, чем параметрические, и это может привести к потери эффективности/мощности;

(iii) непараметрические модели часто требуют больших вычислительных затрат;

(iv) непараметрические модели часто требуют тонкой настройки, и решения касательно этой настройки могут иметь сильное влияние на результаты.

Из всего вышеперечисленного первые две причины являются, вероятно, наиболее серьезными преградами для большей распространенности непараметрических моделей. Вычислительные мощности, доступные экономистам, растут настолько быстро, что вряд ли могут создать серьезные ограничения в исследовании за исключением очень специфических случаев. Основанные на имеющихся данных методы тонкой настройки непараметрических моделей тоже довольно хорошо известны, так что эта часть оценивания может быть в большой степени автоматизирована. Перед тем, как начать слишком сильно защищать непараметрические модели, важно вспомнить, что параметрические модели обычно более просты, легко интерпретируемы и более эффективны, если спецификация модели в большей или меньшей

*Перевод Р. Школлера и С. Анатольева. Цитировать как: Крил, Майкл (2008) «Некоторые ловушки параметрической инференции», Квантиль, №4, стр. 1–6. Citation: Creel, Michael (2008) "Some possible pitfalls of parametric inference," Quantile, No.4, pp. 1–6.

†Адрес: Department of Economics and Economic History, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra (Barcelona) Spain. Электронная почта: *michael.creel@uab.es*

степени правильная. В силу этих причин непараметрические модели лучше всего рассматривать не как замену, а как дополнение к параметрическим.

Существует много литературы, посвященной непараметрическим методам в экономике, в том числи обзоры Hallam (1992), Yatchew (1998) и Расин (2008). Недавно вышедшая книга Li & Racine (2007) собрала воедино множество интересных результатов и является отличным справочником в этом разделе эконометрики. Учитывая избыток источников технической информации, данное эссе всего лишь представляет некоторые простые примеры, показывающие, что излишняя приверженность параметрическим моделям может привести к серьезным ошибкам при инференции, и что непараметрические методы позволяют этого избежать.

Мы рассмотрим простой пример, показывающий, как параметрическая модель может привести к неверным выводам, если проверке правильной спецификации модели не было уделено должного внимания. Предположим, что данные создаются случайным выбором из (y, x), где $y = f(x) + \varepsilon$, x равномерно распределен на интервале $(0, 2\pi)$, и ε – классическая ошибка. Пусть истинная регрессионная функция будет

$$f(x) = 1 + \frac{3x}{2\pi} - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2.$$

Задача заключается в оценивании эластичности $f(x)$ по x для всех возможных значений x.

В общем случае эконометрист не знает функциональной формы $f(x)$. Введение предположения о принадлежности $f(x)$ некоторому семейству функций, характеризуемых конечномерным параметром, приводит модель в класс полупараметрических. Одна из возможных идей – разложить $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторого x_0. Гибкие функциональные формы, такие как трансцендентно-логарифмическая (известная как translog), могут быть проинтерпретированы как разложения Тейлора второго порядка. Ради простоты мы будем работать с разложением Тейлора первого порядка. Разложим в окрестности x_0:

$$h(x) = f(x_0) + D_x f(x_0)\,(x - x_0).$$

Если точка разложения $x_0 = 0$, можно записать

$$h(x) = a + bx.$$

Коэффициент a – это значение функции в точке $x = 0$, а коэффициент наклона b – это значение производной в точке $x = 0$.

Если $f(x)$ известна, то можно посчитать значения коэффициентов в разложении Тейлора. Однако $f(x)$ неизвестна. Если эконометрист решил использовать $h(x)$ как параметрическую модель, объясяющую y, то $y = h(x) + \nu$, или $y = a + bx + \nu$. Это пример неверно специфицированной полупараметрической модели. Она является полупараметрической, так как распределение ν не было задано. Ошибка ν включает в себя как случайную ошибку ε, так и остаточный член разложения Тейлора. Модель является неверно специфицированной, так как не существует (a, b) таких, что $f(x) = h(x)$ для всех значений x.

После того, как выбрана параметрическая модель, проблема заключается в выборе значений a и b. Можно попробовать оценивание с помощью МНК. Целевая функция есть

$$s(a, b) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - h(x_t)\right)^2.$$

Согласно стандартным выводам касательно предельного поведения эконометрических оценок, предельная целевая функция с точностью до константы имеет вид

$$s_\infty(a, b) = \int_0^{2\pi}\left(f(x) - h(x)\right)^2 dx.$$

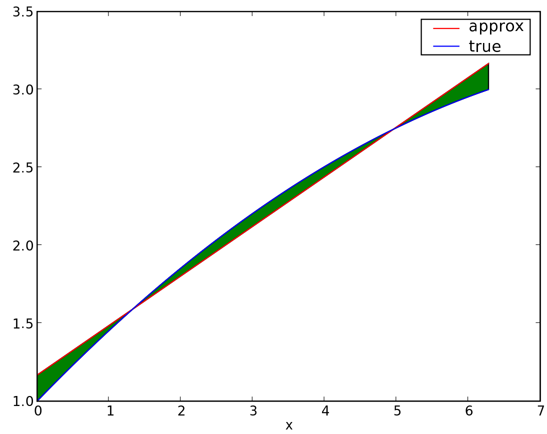

Рис. 1: Истинная и предельная аппроксимирующая функции

МНК-оценки a и b, скажем $\hat{a}$ и $\hat{b}$, сходятся почти наверное к значениям, минимизирующим предельную целевую функцию. Решение условий первого порядка приводит к выводу, что $s_\infty(a, b)$ достигает минимума в точке $\left\{a^0 = \frac{7}{6}, b^0 = \frac{1}{\pi}\right\}$. Оцененная аппроксимирующая функция $\hat{h}(x)$ таким образом сходится почти наверное к

$$h_\infty(x) = 7/6 + x/\pi.$$

На Рис. 1 изображены истинная функция и ее предельная аппроксимация. Разница между этими двумя линиями (затененная область на графике) составляет асимптотическое смещение, которое, как видно, зависит от x.

Обратим внимание на то, что аппроксимирующая модель в общем несостоятельна, даже в точке разложения $x = 0$. Это говорит о том, что «гибкие функциональные формы», основанные на разложении Тейлора, не приводят к состоятельному оцениванию функций в общем случае (White, 1980).

Асимптотически аппроксимирующая модель довольно хорошо «подогнана» под истинную. Это подтверждает тот факт, что неверно специфицированные параметрические модели могут, несмотря ни на что, достаточно хорошо отражать «общую картину». Однако мы заинтересованы в оценивании эластичности функции. Вспомним, что эластичность определяется как отношение предельной функции к ее среднему:

$$\varepsilon(x) = \frac{f'(x)}{f(x)/x}.$$

Хорошая аппроксимация эластичности для всех значений x требует хорошей аппроксимации $f(x)$ и $f'(x)$ для всех значений x. Эластичность, основанная на аппроксимирующей модели, имеет вид

$$\eta(x) = xh'(x)/h(x).$$

На Рис. 2 изображены истинная эластичность и эластичность, полученная из линейной аппроксимирующей модели. Визуально кажется, что эластичность аппроксимирована не так хорошо. Корень из среднеквадратической ошибки аппроксимации эластичности равен

$$\left(\int_0^{2\pi} (\varepsilon(x) - \eta(x))^2 \, dx\right)^{1/2} = 0{,}31546.$$

Теперь предположим использование первых членов тригонометрических рядов в качестве аппроксимирующей модели. Причина использования тригонометрических рядов как аппроксимирующей модели обусловлена асимптотическими свойствами гибкой функциональной

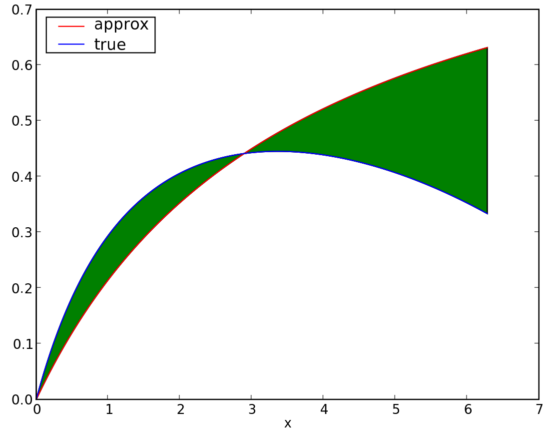

Рис. 2: Истинные и аппроксимирующие эластичности

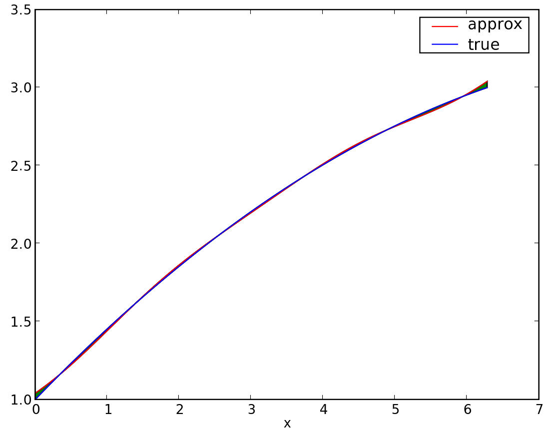

Рис. 3: Истинная функция и более гибкая аппроксимация

формы Фурье (Gallant, 1981), обладающей полупараметрическими свойствами. Это означает, что модель может аппроксимировать неизвестную функцию произвольно хорошо при росте количества членов в разложении до бесконечности. Обычно количество членов в разложении растет вместе с размером выборки. Здесь мы рассмотрим асимптотическое поведение модели с фиксированным количеством членов в разложении, что можно интерпретировать как аппроксимацию поведения оценок в конечных выборках. Рассмотрим набор базисных функций:

$$Z(x) = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & x & \cos(x) & \sin(x) & \cos(2x) & \sin(2x) \end{array} \right].$$

Аппроксимирующая модель имеет вид

$$g_K(x) = Z(x)\alpha.$$

Зафиксировав эти базисные функции при увеличении размера выборки, мы находим,[1] что предельная целевая функция достигает минимума в

$$\left\{ a_1 = \frac{7}{6}, a_2 = \frac{1}{\pi}, a_3 = -\frac{1}{\pi^2}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{1}{4\pi^2}, a_6 = 0 \right\}.$$

[1]Эти расчеты можно сделать в системе компьютерной алгебры, такой как Maxima, см. *http://maxima.sourceforge.net/*.

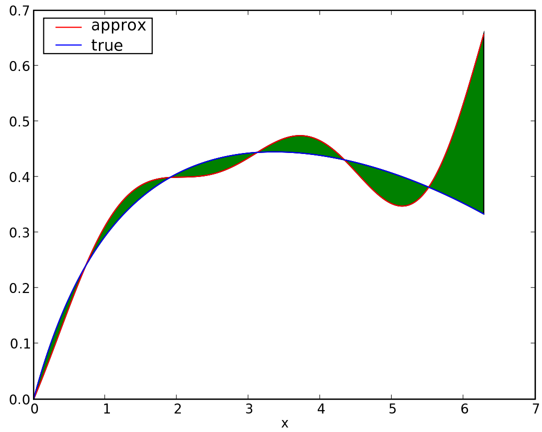

Рис. 4: Истинная эластичность и более гибкая аппроксимация

Подставляя эти значения в $g_K(x)$, мы получаем предельную (в смысле сходимости почти наверное) аппроксимацию

$$g_\infty(x) = 7/6 + x/\pi + (\cos x)\left(-\frac{1}{\pi^2}\right) + (\sin x)\,0 + (\cos 2x)\left(-\frac{1}{4\pi^2}\right) + (\sin 2x)\,0. \tag{1}$$

На Рис. 3 изображены аппроксимирующая и истинная функции. Усеченная тригонометрическая модель дает однозначно лучшую аппроксимацию, чем линейная модель. На Рис. 4 изображены эластичность более гибкой аппроксимации и эластичность истинной функции. В среднем степень подгонки лучше, несмотря на неправдоподобную волнистость оценки. Корень из среднеквадратической ошибки аппроксимации (RMSE) эластичности равен

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(\varepsilon(x) - \frac{g'_\infty(x)x}{g_\infty(x)}\right)^2 dx\right)^{1/2} = 0{,}16213,$$

практически половине RMSE при использовании разложения первого порядка. Если в тригонометрических рядах бесконечное число членов, эта мера ошибки уйдет в 0 (Gallant, 1981).

Ядерные регрессии, известные также как ядерное сглаживание, являются другим хорошо известным методом непараметрического оценивания. Чтобы оценить эластичность, необходимо численно продифференцировать подогнанные ядром значения, и затем посчитать эластичность. На Рис. 5 показаны усредненные по 100 симуляциям Монте Карло результаты, основанные на оценивании регрессии с простым Гауссовским ядром и окном Сильвермана. Из графика видно, что этот непараметрический метод дает сравнительно маленькое смещение. Смещение становится больше в окрестности верхнего предела данных, но в других областях оно остается маленьким.

Этот простой пример показывает, что параметрическая модель может привести к неверным выводам, если она в достаточной степени неверно специфицирована. Непараметрические методы, такие как формы Фурье или ядерные регрессии, могут уменьшить смещение при оценивании эластичности функции по сравнению с неверно специфицированной параметрической моделью. Конечно, по мере увеличения размера выборки становится несложно обнаружить неверную спецификацию в простой линейной модели, если для этого приложить усилия. Большие различия в результатах параметрических и непараметрических моделей должны вызвать у исследователя подозрения о неправильной спецификации параметрической модели. К сожалению, этот шаг обычно опускается во многих эмпирических исследованиях.

Важно помнить, что большинство упомянутых выводов и заключений было сделано в терминах асимптотических результатов. Когда размер выборки достаточно мал, непараметрические методы могут приводить к достаточно большой дисперсии, даже если их смещение

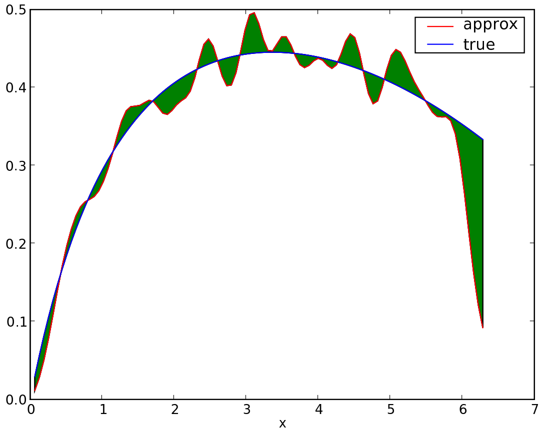

Рис. 5: Истинная эластичность и ядерная регрессионная оценка

меньше по сравнению со смещением неверно специфицированной параметрической модели. В рамках дилеммы выбора между смещением и дисперсией может оказаться, что неверно специфицированная параметрическая модель может оказаться лучше непараметрической. Тем не менее, при росте размера выборки асимптотическое смещение в простой линейной аппроксимирующей модели может привести к отвержению нулевой гипотезы с вероятностью большей, чем выбранный уровень значимости. Непараметрические методы, такие как формы Фурье или ядерное сглаживание, приводят к состоятельному оцениванию регрессионной функции и не приводят к отвержению верной нулевой гипотезы, как при использовании простой линейной аппроксимирующей модели.

Литература

Расин, Джеффри (2008). Непараметрическая эконометрика: вводный курс. *Квантиль* 4, 7–56.

Gallant, A.R. (1981). On the bias in flexible functional forms and an essentially unbiased form: The Fourier flexible form. *Journal of Econometrics* 15, 211–245.

Hallam, A. (1992). A brief overview of nonparametric methods in economics. *Northeastern Journal of Agricultural and Resource Economics* 21, 98–112.

Li, Q. & J. Racine (2007). *Nonparametric econometrics.* Princeton University Press.

Yatchew, A. (1998). Nonparametric regression techniques in economics. *Journal of Economic Literature* 36, 669–721.

White, H. (1980). Using least squares to approximate unknown regression functions, *International Economic Review* 21, 149–70.

Some possible pitfalls of parametric inference

Michael Creel

Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, Spain

This essay reviews some of the undesirable things that can occur when parametric models are used without proper concern for checking that they are at least approximately correctly specified. It shows that nonparametric methods can, to a certain extent, avoid these problems.