

# Эконометрический ликбез: моделирование временных рядов

## Объекты неструктурного моделирования временных рядов<sup>\*</sup>

Станислав Анатольев<sup>†</sup>

*Российская экономическая школа, Москва, Россия*

При моделировании динамики временных рядов решение о выборе класса и типа модели сильно зависит от моделируемого объекта. Данное эссе рассказывает о специфике моделирования различных объектов, таких как условное на предыстории среднее, условная дисперсия, условный квантиль, условная вероятность и условная плотность. Перечисляются наиболее популярные классы моделей для каждого объекта, обсуждаются особенности их анализа. При этом внимание уделяется как одномерному, так и многомерному случаям, а также даются ссылки на узкотематические, но более подробные обзоры.

## 1 Введение

На начальном шаге неструктурного<sup>1</sup> моделирования динамики временных рядов приходится решать, какой объект распределения рассматриваемой переменной<sup>2</sup>, условного на предыстории этой переменной, интересен исследователю. Под фразами «построить модель для ВВП» и «построить модель для доходности» чаще всего понимаются не только совершенно разные модели, но и разные моделируемые объекты. Если обозначить ВВП как  $y_t$ , доходность финансового актива за  $r_t$ , а предысторию рассматриваемого ряда как  $I_{t-1}$ , то «модель для ВВП» скорее всего означает модель для условного среднего  $\mathbb{E}[\Delta y_t | I_{t-1}]$ , являющегося наилучшим прогнозом (при среднеквадратических потерях) для роста ВВП, а «модель для доходности» – модель для условной дисперсии  $\mathbb{V}[r_t | I_{t-1}]$ , являющейся одной из мер волатильности доходностей. То есть, перед моделированием временного ряда необходимо определиться, какой именно объект, какая именно регрессия на предыстории, представляет интерес для исследователя.<sup>3</sup> Упомянутые выше объекты не являются единственными интересными при моделировании ВВП и доходности. Несколько реже мы можем видеть модели для условной (на предыстории) вероятности  $\mathbb{P}\{\Delta y_t > \delta | I_{t-1}\}$ , прогнозирующие подъемы и спады, или для  $f_{t-1}(r_t)$ , условной плотности доходностей.

---

<sup>\*</sup>Работа основана на лекциях, читаемых автором в РЭШ. Цитировать как: Анатольев, Станислав (2013). «Объекты неструктурного моделирования временных рядов», Квантиль, №11, стр. 1–11. Citation: Anatolyev, Stanislav (2013). “Objects of nonstructural time series modeling,” *Quantile*, No.11, pp. 1–11.

<sup>†</sup>Адрес: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, 47, офис 1721(3). Электронная почта: [sanatoly@nes.ru](mailto:sanatoly@nes.ru)

<sup>1</sup>Неструктурным называется моделирование динамики, не основанное на экономической теории. Интересен в таком случае анализ какой-то характеристики условного распределения, где в качестве информационного множества выступает собственная предыстория, чаще всего начиная с предыдущего периода.

<sup>2</sup>Переменная может быть скалярной или векторной. В первом случае анализ называется однопеременным или одномерным, во втором — многопеременным или многомерным.

<sup>3</sup>Иногда приходится читать работы, в которых автор сначала моделирует условное среднее (обычно с помощью линейной авторегрессии), а затем приступает к моделированию условной дисперсии (обычно с помощью ARCH-моделей), обосновывая свои шаги тем, что «вот что-то нашли в среднем, теперь логично смоделировать дисперсию». Подобный исследователь не имеет понятия, что он(а) исследует и, главное, зачем.

В настоящем эссе мы рассказываем, какие объекты обычно представляют интерес для исследователя, анализирующего конкретные типы данных. Для каждого объекта мы перечисляем наиболее актуальные и популярные модели и указываем на некоторые особенности их анализа. Большинство моделей представлены в своей простейшей конфигурации: например, авторегрессия имеет первый порядок, модель с режимами — два режима и т.д. Мы также приводим ссылки на соответствующую литературу, преимущественно обзоры, содержащие более подробный материал по каждому классу моделей.

Упомянем также, что является критерием предсказуемости временного ряда. Временной ряд  $x_t$  с предысторией  $I_{t-1}$  считается предсказуемым в смысле среднего, если  $\mathbb{E}[x_t|I_{t-1}]$  зависит от  $I_{t-1}$ , предсказуемым в смысле дисперсии, если  $\mathbb{V}[x_t|I_{t-1}]$  зависит от  $I_{t-1}$ , предсказуемым в смысле знака, если  $\mathbb{P}\{x_t > 0|I_{t-1}\}$  зависит от  $I_{t-1}$ , предсказуемым в смысле  $\alpha$ -квантиля, если  $\mathbb{Q}_\alpha(x_t|I_{t-1})$  зависит от  $I_{t-1}$  (где  $\mathbb{Q}_\alpha$  обозначает  $\alpha$ -квантильную функцию), и т.д. Под «просто» предсказуемостью можно понимать зависимость условной плотности  $f_{t-1}(r_t)$  от  $I_{t-1}$ . Заметим, что предсказуемость временного ряда в одном смысле необязательно влечет за собой предсказуемость в другом смысле (см. примеры в Анатольев 2006). Видим, что критерием предсказуемости или непредсказуемости выступает факт зависимости или независимости объекта от информации в предыстории, но ни в коем случае не численный размер объекта (так что, например, большое, но постоянное значение  $\mathbb{E}[x_t|I_{t-1}]$  не означает предсказуемости среднего, а  $\mathbb{P}\{x_t > 0|I_{t-1}\} = 1$  не означает предсказуемости знака). Чтобы протестировать на предсказуемость, необходимо прогнать регрессию (возможно, нелинейную) соответствующего объекта на некоторых переменных из информационного множества  $I_{t-1}$  и протестировать на их невключение в нее. Например, для тестирования предсказуемости среднего надо прогнать регрессию среднего для  $x_t$ , для тестирования предсказуемости знака — прогнать бинарную регрессию для индикатора  $\mathbb{I}\{x_t > 0\}$ , и т.д. Некоторые подробности см. в эссе Анатольев (2006).

На протяжении данного эссе мы предполагаем, что моделируются (возможно, после взятия приращений логарифмов или применения других преобразований) строго стационарные эргодические ряды.

## 2 Моделирование условного среднего

Чаще всего целью моделирования макроэкономического ряда  $y_t$  является прогнозирование его уровня. При обычно используемых среднеквадратических потерях<sup>4</sup> оптимальным прогнозом является условное на предыстории среднее  $\mathbb{E}[y_t|I_{t-1}]$ . Поскольку речь чаще всего идет про спокойные, низкочастотные макроэкономические данные типа ВВП или безработицы, обычно, хоть и не всегда, накладывают условие условной гомоскедастичности  $\mathbb{V}[y_t|I_{t-1}] = \sigma^2$ . Конечный интерес чаще всего представляют функции импульсных откликов (IRF, от англ. impulse response function), показывающие распространение влияния шоков для различных горизонтов  $h$ . Малые значения  $h$  соответствуют краткосрочным эффектам, умеренные  $h$  — среднесрочным, а  $h = \infty$  — долгосрочному. Долгосрочный эффект равен нулю, раз анализируется стационарный эргодичный ряд.

Самым простым классом моделей для условного среднего является класс линейных авторегрессий (AR, от англ. autoregression)

$$\mathbb{E}[y_t|I_{t-1}] = \mu + \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \dots + \rho_p y_{t-p},$$

или

$$y_t = \mu + \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \dots + \rho_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

<sup>4</sup>То есть когда функция потерь равна  $e^2$ , где  $e$  — ошибка прогноза, а прогноз является оптимальным, если минимизируется  $\mathbb{E}[e^2]$ . Другие примеры функций потерь можно найти в Маккракен (2006).

где (здесь и далее)  $\varepsilon_t$  — шок со свойством непрогнозируемости среднего  $\mathbb{E}[\varepsilon_t | I_{t-1}] = 0$ . Динамика переменной  $y_t$  линейная, а импульсные отклики пропорциональны размеру шока и не зависят от предыстории:

$$\text{IRF}(h) = \frac{\partial y_{t+h}}{\partial \varepsilon_t}.$$

Например, в случае линейной авторегрессии первого порядка ( $p = 1$ ) функция импульсного отклика равна  $\text{IRF}(h) = \rho_1^h$ .

Линейная авторегрессия в многомерном контексте называется векторной авторегрессией (VAR, от англ. vector autoregression). Векторные авторегрессии позволяют не только отслеживать динамику исследуемых переменных, но и анализировать их влияние друг на друга в том же периоде. См., например, главу 11 в учебнике Hamilton (1994).

Линейные модели слишком просты. В частности, импульсные отклики пропорциональны размеру шока, при перемене знака шока меняется только их знак, они неспособны учесть разную реакцию на шоки в разных состояниях системы. Нелинейную динамическую модель создать очень просто — достаточно в линейную модель ввести компоненты, нелинейные по шоку. Примерно таким образом можно сформировать класс билинейных моделей (англ. bilinear models). Несмотря на их простоту, в эконометрике они не получили особой популярности ввиду их плохой интерпретируемости. Неструктурная модель хороша, когда она способна учесть, или «объяснить», какие-то экономические стилизованные факты, присущие рассматриваемому типу данных.

Для нелинейных моделей эффекты откликов характеризуются обобщённой функцией импульсных откликов (GIRF, от англ. generalized IRF)

$$\text{GIRF}(h, \varepsilon, I_{t-1}) = \mathbb{E}[y_{t+h} | \varepsilon_t = \varepsilon, I_{t-1}] - \mathbb{E}[y_{t+h} | \varepsilon_t = 0, I_{t-1}].$$

В определении фигурирует так называемый пересмотр прогноза, то есть как меняется прогноз при реализации ненулевого шока по сравнению с ситуацией, когда шок отсутствует. Эту функцию даже для простых нелинейных моделей аналитически вычислить очень сложно, поэтому обычно она рассчитывается численно с помощью симуляционных методов.

Наиболее популярными классами нелинейных моделей для условного среднего макроэкономических переменных, подверженных цикличности (ВВП, безработица), являются те, которые предусматривают наличие разных режимов, соответствующих разным стадиям деловых циклов, ведь это как раз и является ключевым стилизованным фактом для макроэкономических данных. В каждом из режимов динамика линейна, но она разная в разных режимах, а принадлежность к тому или иному режиму определяется эндогенно в зависимости от значений переменной.

Ярким представителем моделей с режимами является пороговая авторегрессия (TAR, от англ. threshold autoregression). Ее двухрежимная версия в простой конфигурации выглядит следующим образом:

$$y_t = \begin{cases} \mu_1 + \rho_1 y_{t-1}, & \text{если } q_{t-1} \leq \gamma \\ \mu_2 + \rho_2 y_{t-1}, & \text{если } q_{t-1} > \gamma \end{cases} + \varepsilon_t,$$

где  $q_{t-1}$  — пороговая переменная, наблюдаемая в момент  $t - 1$ , а  $\gamma$  — значение порога. Модель TAR легко обобщается на случай большего числа лагов, большего количества режимов и нескольких пороговых переменных. Доступное изложение материала о пороговых авторегрессиях содержится в Hansen (1997). Возможно идею пороговых переключений режимов рассматривать и в контексте векторных авторегрессий; см., например, Balke (2000).

Похожа на пороговую модель с гладкими переходами (STAR, от англ. smooth transition autoregression). Простейшая двухрежимная версия выглядит как

$$y_t = (\mu_1 + \rho_1 y_{t-1})(1 - G(q_{t-1}, \gamma, \delta)) + (\mu_2 + \rho_2 y_{t-1})G(q_{t-1}, \gamma, \delta) + \varepsilon_t,$$

где  $G(\cdot, \gamma, \delta)$  — функция перехода,  $q_{t-1}$  — переменная перехода,  $\gamma$  — точка локализации перехода, а  $\delta$  — дополнительный параметр его гладкости. Модель STAR можно обобщить на случаи большего количества переходов и нескольких переменных перехода. Подробный обзор моделей с гладкими переходами содержится в работе Franses, Teräsvirta & van Dijk (2002).

В приведенных двух моделях переходы между режимами управляются наблюдаемой (возможно, с точностью до параметров) переменной  $q_{t-1}$ . Это непривлекательное предположение, и более гармоничной выглядит формулировка модели с Марковскими переключениями режимов (MSW, от англ. Markov switching). Аналогичная двухрежимная версия выглядит следующим образом:

$$y_t = \begin{cases} \mu_1 + \rho_1 y_{t-1}, & \text{если } s_t = 0 \\ \mu_2 + \rho_2 y_{t-1}, & \text{если } s_t = 1 \end{cases} + \varepsilon_t,$$

где  $s_t$  — ненаблюдаемая бинарная переменная состояния, о которой лишь известно, что её динамика следует Марковской цепи первого порядка с матрицей переходов

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}$$

с неизвестными переходными вероятностями  $p$  и  $q$ . Платой за концептуальную привлекательность такой модели является относительная трудность ее оценивания: в то время как в моделях TAR и STAR функцию (квази-)правдоподобия выписать легко, в случае модели MSW функция (квази-)правдоподобия рассчитывается рекурсивно с помощью так называемого фильтра Гамильтона (по имени создателя модели, см. Hamilton, 1989). Причиной является как раз наличие ненаблюдаемого процесса  $s_t$ . Модель MSW можно обобщить на случаи большего количества режимов, более сложной динамики переменной состояния и зависимых от времени переходных вероятностей. Введение в модели с Марковскими переключениями режимов содержится в работе Куан (2013) а этом выпуске «Квантиля».

Модель с Марковскими переключениями является членом широкого класса моделей, называемых моделями с ненаблюдаемыми компонентами. В каждой такой модели присутствует латентный процесс, динамика и распределение которого специфицированы (в случае модели MSW это  $s_t$ ), а дополнительное уравнение связывает наблюдаемые переменные (в случае модели MSW это  $y_t$ ) с этими латентными переменными. Например, исследователь может наблюдать рост ВВП, но осознавать, что вклад в наблюдаемые данные по росту вносят несколько факторов с принципиально разной динамикой. Здесь наличие латентных факторов осложняет оценивание, к которому существует несколько подходов, основным из которых является фильтр Кальмана. См. подробный обзор в работе Цыплаков (2011).

Интересным классом являются модели с мультипликативной ошибкой (MEM, от англ. multiplicative error model). Модели MEM строятся для временных рядов, которые положительны по построению. Положительных экономических и особенно финансовых рядов довольно много: процентные ставки, дюрации между последовательными транзакциями, различные меры волатильности (например, реализованная волатильность), спреды и т.п. Структура модели MEM напоминают структуру моделей GARCH (см. раздел 3):

$$y_t = \psi_t \eta_t,$$

где  $\eta_t \sim \mathcal{D}$  для некоего положительного распределения  $\mathcal{D}$  с единичным средним, а динамика условного среднего  $\psi_t$  задается авторегрессионным образом, например GARCH-подобным уравнением

$$\psi_t = \omega + \alpha y_{t-1} + \beta \psi_{t-1}.$$

См. обзор моделей MEM в свежей работе Brownlees, Cipollini & Gallo (2012).

Привычные стационарные (в частности, линейные) авторегрессии обладают тем свойством, что автокорреляционная функция падает по показательному закону, то есть асимптотически как  $a^j$  для некоторого  $-1 < a < 1$ . В ряде случаев такое падение автокорреляций слишком быстрое по сравнению с реальным поведением выборочных автокорреляций. Иногда по этой причине динамику (речь идёт в первую очередь о долгосрочной динамике) моделируют с длинной памятью (англ. long memory), в результате чего автокорреляционная функция падает уже по степенному закону, то есть асимптотически как  $j^{d-1}$  для некоторого  $0 < d < 1$ . Преобразование исходной переменной принимает форму дробной интегрированности (англ. fractional integration), т.е. вместо самой переменной  $y_t$  или её приращения  $\Delta y_t$  моделируется дробное приращение  $\Delta^d y_t$ , причём параметр  $d$  также оценивается наряду с остальными параметрами модели. См. обзор Baillie (1996).

### 3 Моделирование условной дисперсии

Условная дисперсия интересна при динамическом моделировании поведения финансовых данных вроде доходностей (которые будем обозначать через  $r_t$ ), поскольку интуитивно ассоциируется с волатильностью. Для того чтобы адекватно смоделировать условную дисперсию, необходимо сначала (или одновременно) верно специфицировать условное среднее, иначе ошибки спецификации условного среднего волеются в дисперсионное уравнение и искажат инференцию о волатильности. Поскольку обычно рассматриваются эффективные рынки, достаточно в уравнении для среднего учесть (возможно присутствующую) небольшую серийную корреляцию с помощью авторегрессионного слагаемого и определенные сезонные компоненты с помощью фиктивных переменных.

Самый известный и популярный класс моделей условной дисперсии – это модели из класса ARCH (от англ. autoregressive conditional heteroskedasticity), введенного Робертом Энгелем в начале 80-х гг.; см. недавние обзоры, например, в Teräsvirta (2009) и Росси (2010). Они имеют следующую структуру:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$

где  $\mu_t$  – условное среднее,  $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$  – непрогнозируемый (в среднем) шок,  $\sigma_t$  – условное стандартное отклонение,  $\eta_t$  – стандартизованный шок, имеющий распределение  $\mathcal{D}$  с нулевым средним, динамика условной дисперсии  $\sigma_t^2$  задается авторегрессионно, причём движущей силой являются шоки прошлых периодов (например,  $\varepsilon_{t-1}$ ) или (реже) стандартизованные шоки прошлых периодов (например,  $\eta_{t-1}$ ). В случае модели GARCH (от англ. generalized ARCH)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

Существует великое множество спецификаций дисперсионного уравнения (см. Bollerslev 2009). Например, оно может формулироваться не для условной дисперсии, а для её логарифма, для квадратного корня из неё (т.е. для условного стандартного отклонения) или другой её функции. Инициировать процесс условной дисперсии может квадрат предыдущих шоков, как в базовой ARCH-постановке, и тогда так называемая кривая влияния новостей (НИС, от англ. news impact curve) представляет из себя параболу. Более правдоподобна кривая влияния новостей, несимметричная относительно знака предыдущего шока, что иногда интерпретируется как эффект рычага (от англ. leverage effect). Например, одна из популярных спецификаций, учитывающих несимметричность, выглядит следующим образом:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}\{\varepsilon_{t-1} > 0\} + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

Это так называемая спецификация GJR-GARCH (три первые буквы – аббревиатуры фамилий авторов). Кроме асимметричного влияния шоков, в дисперсионное уравнение модели

GARCH иногда закладывают переключения режимов, плавные переходы или структурные сдвиги параметров. Также можно ввести в дисперсионное уравнение свойство длинной памяти, в результате чего возникает модель FIGARCH (от англ. fractionally integrated GARCH). Спецификация условного распределения  $\mathcal{D}$  несущественна для оценивания и прогнозирования волатильности, но имеет значение для моделирования динамики хвостов и условной плотности (см. разделы 4 и 6).

Базовую модель ARCH можно обогатить возможностью так называемых скачков, способных объяснить большое количество резких изменений цен на финансовом рынке. Шоки делятся на два типа: «гладкие» как ранее и «скачки»:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{K_t} \zeta_{t,k},$$

где скачками являются шоки  $\zeta_{t,k}$ , которые реализуются в периоде  $t$  и распределены независимо друг от друга и от «гладких» шоков. Их количество  $K_t$  подчиняется распределению (например) Пуассона с параметром интенсивности, скажем,  $\lambda_t$ , который в свою очередь следует авторегрессионному процессу. См., например, приложение в работе Белоусов (2006).

Наконец, параллельно классу моделей ARCH существуют более привлекательные (концептуально, но не с точки зрения оценивания) модели стохастической волатильности (SV, от англ. stochastic volatility). Отличие модели SV от модели ARCH в том, что в дисперсионном уравнении для первой наличествует еще один источник неопределенности, т.е. ещё один шок, независимый от обычного стандартизованного шока, в то время как дисперсионное уравнение модели ARCH является детерминистической функцией от прошлых (почти) наблюдаемых шоков:

$$\log \sigma_t^2 = \gamma + \rho \log \sigma_{t-1}^2 + \nu_t,$$

где  $\nu_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$ . Подробно о моделях стохастической волатильности см. Цыплаков (2010).

При многомерном моделировании волатильности, то есть матрицы условных дисперсий и ковариаций  $\Sigma_t$ , возникает проблема перепараметризации, то есть быстрого роста количества параметров с ростом количества анализируемых переменных. Существует несколько представлений для динамики дисперсионной матрицы, но все они в той или иной степени подвержены этой проблеме. Другой аспект — матрица  $\Sigma_t$  должна быть по построению положительно определена во все моменты времени. Например, популярная модель BEKK (от аббревиатур фамилий создателей) для многомерного аналога GARCH(1,1) имеет вид

$$\Sigma_t = \Omega + A\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}A' + B\Sigma_{t-1}B',$$

где  $\Omega$  — симметричная положительно определенная матрица констант, а  $A$  и  $B$  — матрицы констант. Популярной альтернативой в настоящее время является так называемая модель динамических условных корреляций (DCC, от англ. dynamic conditional correlations), см. обзор Bauwens, Laurent & Rombouts (2006).

## 4 Моделирование условных квантилей

Необходимость динамического моделирования условных квантилей может возникнуть в двух случаях. В первом случае исследователь использует несимметричную кусочно-линейную функцию потерь

$$L(u) = \mathbb{E}[(\alpha \mathbb{I}\{u \geq 0\} - (1 - \alpha) \mathbb{I}\{u < 0\})|u|],$$

по отношению к которой  $\alpha$ -квантиль  $\mathbb{Q}_\alpha(x_t|I_{t-1})$  является оптимальным прогнозом. Во втором случае исследователю интересны квантили сами по себе, как, например, при анализе стоимостной меры риска (VaR, от англ. value at risk).

Основной способ расчёта условных квантилей — косвенный, через моделирование условной плотности (см. раздел 6) или её хвостов. В простейших случаях дело сводится к моделированию ещё более простых объектов. Например, если доходности подчиняются простому соотношению  $r_t/\sigma_t \sim iid \mathcal{D}$ , то  $\mathbb{Q}_\alpha(r_t|I_{t-1}) = \phi_0 + \phi_\sigma \sigma_t$ , где постоянные  $\phi_0$  и  $\phi_\sigma$  зависят только от распределения  $\mathcal{D}$ . Значит, условные квантили можно смоделировать, смоделировав динамику условного стандартного отклонения и безусловную плотность стандартизованных доходностей.

Не так давно Engle & Manganelli (2004) предложили моделировать условные квантили непосредственно с помощью авторегрессии:

$$\mathbb{Q}_\alpha(r_t|I_{t-1}) = \xi + \alpha g(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots) + \beta \mathbb{Q}_\alpha(r_{t-1}|I_{t-2}),$$

где  $g(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$  — движущая сила процесса, определённая функция от предыстории. Такая модель, будучи заточена на анализ стоимостной меры риска, имеет сокращение CAViAR (от англ. conditional autoregressive value at risk). В качестве движущей силы процесса авторы предлагают четыре варианта её спецификации, все, впрочем, не очень чётко мотивированные. Одна из простейших спецификаций подразумевает включение регрессоров  $r_{t-1}^-$  и  $r_{t-1}^+$ , где  $a^- = \min\{a, 0\}$  и  $a^+ = \max\{a, 0\}$ .

Обобщение CAViAR-модели на многомерный случай содержится в White, Kim & Manganelli (2010). Kuester, Mittnik & Paolella (2006) сравнивают различные подходы в точности прогнозирования стоимостной меры риска.

## 5 Моделирование условных вероятностей

Иногда вместо моделирования поведения непрерывно распределённой переменной (такой как рост ВВП или доходность финансового актива) интересно моделировать факт превышения этой переменной какого-то порога (соответственно, превышение ростом определённого «естественного уровня» при анализе бизнес-циклов или положительность доходности при анализе направления движения рынка). В таком случае исследуемой переменной является индикатор, скажем,  $d_t$ , принимающий значения 1 или 0 (например,  $d_t = \mathbb{I}\{\Delta y_t > \delta\}$  при известном пороге  $\delta$ ). Естественным кандидатом при моделировании этого объекта является аналог модели бинарного выбора, популярной в кросс-секционном анализе, пробита или логита. В данном контексте такие модели называют автопробитом и автологитом, соответственно, причём при анализе бизнес-циклов принято использовать пробит-версию, а при анализе направления движения финансовых рынков — логит-версию. Например, автологит выглядит следующим образом:

$$\mathbb{P}\{d_t = 1|I_{t-1}\} = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_t)},$$

где переменная  $\theta_t$  параметризуется как (обычно линейная) функция от наблюдаемых в предшествующий период переменных. Стильно использовать предыдущие индикаторы типа  $d_{t-1}$ , поскольку моделируются именно индикаторы, но включение переменных, лежащих в основе построения индикатора ( $\Delta y_t$  в примере выше), тоже возможно. См., например, модель Rydberg & Shephard (2003) для направления движения рынка от транзакции к транзакции. В работе Anatolyev (2009) предлагается обобщение автологит-модели на случай одновременного анализа направления движения нескольких рынков.

Аналогично можно строить авторегрессии для дискретных, но не бинарных переменных, например целочисленных. См., например, работу Rydberg & Shephard (2003) применительно к моделированию количества скачков цены от транзакции к транзакции.

## 6 Моделирование условных плотностей

Вся информация о динамике интересующей исследователя переменной содержится в эволюции её условного распределения. Мы будем считать последнее непрерывным и говорить о моделировании динамики условной плотности. Поскольку плотность — заметно более сложный объект, чем моменты, квантили или вероятности, моделировать её динамику значительно сложнее. С другой стороны, из оцененной адекватной модели условной плотности можно вывести динамику всех остальных, более простых объектов, например, условных квантилей (более того, это и есть ведущий способ их косвенного моделирования)<sup>5</sup>.

Сначала моделируется условное среднее  $\mu_t$  (например, как линейная авторегрессия), затем условное стандартное отклонение  $\sigma_t$  (например, в рамках GARCH-класса). Предполагается, что стандартизованные шоки  $\eta = \sigma_t^{-1}(r_t - \mu_t)$  распределены, условно на предыстории, согласно (негауссовому) распределению  $\mathcal{D}(\theta)$  со нулевым средним, единичной дисперсией и вектором дополнительных параметров  $\theta$ , отвечающих за форму распределения (например, количество степеней свободы, показатель скошенности и т.д.). Чаще всего используется распределения Стьюдента или GED (от англ. generalized error distribution, введено в обиход в GARCH-контексте в работе Nelson 1991). Эти распределения способны подстроиться под типично тяжелохвостовое условное поведение финансовых доходностей, за что отвечает дополнительный параметр тяжести хвостов (для распределения Стьюдента этот параметр — количество степеней свободы). В то же время указанные распределения симметричны и поэтому не учитывают скошенность доходностей. Примерами распределений, учитывающими и асимметрию, являются скошенные распределения Стьюдента и GED. Первое используется довольно интенсивно, эту моду ввёл Брюс Хансен в Hansen (1994). Мы же здесь воспроизведём форму плотности скошенного GED-распределения (использованного, например, в работе Anatolyev & Shakin 2007):

$$f(\eta; \kappa, \varphi) = \frac{\kappa}{2\Lambda\Gamma(1/\kappa)} \exp\left(-\left|\frac{\eta - \Delta}{\Lambda(1 + \operatorname{sgn}(\eta - \Delta)\varphi)}\right|^\kappa\right),$$

где  $\Lambda$  и  $\Delta$  — определённые функции  $\kappa$  и  $\varphi$ ,  $\kappa > 0$  — параметр тяжести хвостов, а  $-1 < \varphi < 1$  — дополнительный параметр скошенности.

Иногда в качестве параметрических плотностей используются такие, которые произошли из различных разложений. Пример подобной плотности — так называемое распределение Грама—Шарлье:

$$f(\eta; s, k) = \phi(\eta) \left(1 + \frac{s}{3!}(\eta^3 - 3\eta) + \frac{k - 3}{4!}(\eta^4 - 6\eta^2 + 3)\right),$$

где  $\phi(\eta)$  — плотность стандартного нормального распределения, а  $s$  и  $k$  — параметры скошенности и тяжести хвостов. Видно, что аналитическая форма напоминает некоторое усечённое разложение (произвольной плотности вокруг гауссовой). Данная плотность интегрируется в единицу, матожидание равно нулю, дисперсия — единице, а третий и четвёртый моменты — ровно  $s$  и  $k$ . Не всё, однако, здесь гладко. Строго говоря, такая плотность — не плотность, так как она может принимать отрицательные значения. Чтобы избавиться от этой неприятности, получила распространение другая форма, где выражение в скобках возводится в квадрат, и получившийся результат нормируется. Однако в результате такого преобразования утрачивается первоначальная идея разложения, и, в частности, портится интерпретация параметров  $s$  и  $k$ .

Описанные выше подходы обладают существенным недостатком: хотя форма распределения отличается от формы нормального распределения, динамика условных моментов высоких порядков (например, третьих и четвёртых) жёстко привязана к динамике условного

<sup>5</sup>Речь не идёт об условном среднем и условной дисперсии, поскольку обычно при моделировании плотности в первую очередь моделируются эти два объекта явным образом, см. ниже.

среднего и условной дисперсии. Чтобы разорвать эту связь, можно вектор параметров  $\theta$  в спецификации распределения  $\mathcal{D}(\theta)$  не сохранять постоянной величиной, а разрешить ему эволюционировать, параметризовав его как функцию от времени, а точнее, от наблюдаемой предыстории. Такой подход предложен в работе Hansen (1994), а соответствующая модель называется ARCD (от англ. autoregressive conditional density). Hansen (1994) показал на двух эмпирических примерах, как можно создать такую параметризацию. Для «плотности» Грам–Шарлье, приведённой выше, можно придумать уравнение динамики параметров  $s$  и  $k$ . Вполне естественно, что подобное занятие гораздо более затруднительно, чем придумать логичную спецификацию динамики первых двух условных моментов. Условное среднее и условная дисперсия обладают интуитивной интерпретацией в терминах предсказуемости и волатильности, а также обилием стилизованных фактов относительно связанных с ними явлений. Параметры же условного распределения чаще всего лишены такой интерпретации и стилизованных фактов. Кроме того, во многих случаях попытки эмпирически оценить такие спецификации приводят к статистически незначимым коэффициентам, сигнализируя о постоянстве во времени этих параметров или по крайней мере несущественной их динамике. Несмотря на это, ожидается, что финансовые эконометристы в ближайшее время уделят данному подходу больше внимания и обнаружат интересные и нетривиальные закономерности.

Описанный выше подход можно применить и к классу МЕМ-моделей (см. раздел 2), да и к другим классам, где фигурирует параметры, отвечающие за форму распределения (см., например, цитированную выше работу Anatolyev 2009).

При моделировании поведения динамики многомерных величин используются те же принципы; см. применение ряда многомерных плотностей в работе Балаев (2011). Здесь присутствуют, однако, дополнительные трудности. Одна из них — отсутствие в литературе обобщений некоторых сложных одномерных распределений на многомерный случай; существующие же обобщения нередко имеют очень сложное аналитическое представление. Вторая трудность типична для многомерного моделирования — это резкое увеличение количества параметров с ростом числа моделируемых переменных.

Обе проблемы помогает решить популярный инструментарий, получивший название копульного моделирования; см., например, обзор Patton (2012). Копула (англ. copula) представляет собой многомерное распределение  $C(u_1, u_2, \dots, u_p)$  с областью определения  $[0, 1]^p$ , которое описывает зависимость компонент, а в качестве аргументов используются маргинальные распределения  $F(y_j)$  компонент. В результате имеем многомерное распределение  $C(F(y_1), F(y_2), \dots, F(y_p))$ . Таким образом, задача многомерного моделирования и оценивания распадается на  $p$  задач одномерного моделирования и оценивания распределений компонент и задачу моделирования и оценивания копулы. Копула обычно выбирается из многочисленных классов копул, обладающих наиболее подходящими свойствами, описывающими зависимость компонент. Параметров в спецификации копулы обычно мало, чем избегается перепараметризация модели. Более того, моделирование маргинальных компонент может быть непараметрическим, а моделирование копулы в то же самое время — параметрическим или полупараметрическим. Определённые трудности вызывает моделирование с помощью копул, когда некоторые (особенно если только некоторые) из компонент распределены дискретно; в качестве примера см. Anatolyev & Gospodinov (2010).

При моделировании условных плотностей принято тестировать модель на правильную спецификацию используемого семейства плотностей. С современным состоянием этой сферы можно ознакомиться в обзоре Хейфец (2011).

## Список литературы

- Балаев, А. (2011). Моделирование многомерных параметрических плотностей финансовых доходностей. *Квантиль* 9, 39–60.
- Белюсов, С. (2006). Моделирование волатильности со скачками: применение к российскому и американскому фондовым рынкам. *Квантиль* 1, 101–110.
- Куан, Ч.-М. (2013). Модель с марковскими переключениями. *Квантиль* 11, ??–??.
- Маккракен, М. (2006). Парные тесты на одинаковую точность прогнозов. *Квантиль* 1, 53–62.
- Росси, Э. (2010). Одномерные GARCH-модели: обзор. *Квантиль* 8, 1–67.
- Хейфец, И. (2011). Тестирование распределений. *Квантиль* 9, 25–34.
- Цыплаков, А. (2010). Сделать тайное явным: искусство моделирования с помощью стохастической волатильности. *Квантиль* 8, 69–122.
- Цыплаков, А. (2011). Введение в моделирование в пространстве состояний. *Квантиль* 9, 1–24.
- Anatolyev, S. (2009). Multi-market direction-of-change modeling using dependence ratios. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 13, статья 5.
- Anatolyev, S. & N. Gospodinov (2010). Modeling financial return dynamics via decomposition. *Journal of Business & Economic Statistics* 28, 232–245.
- Anatolyev, S. & D. Shakin (2007). Trade intensity in the Russian stock market: dynamics, distribution and determinants. *Applied Financial Economics* 17, 87–104.
- Baillie, R.T. (1996). Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of Econometrics* 73, 5–59.
- Balke, N.S. (2000). Credit and economic activity: credit regimes and nonlinear propagation of shocks. *Review of Economics and Statistics* 82, 344–349.
- Bauwens, L., S. Laurent & J.V.K. Rombouts (2006). Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of Applied Econometrics* 21, 79–109.
- Bollerslev, T. (2009). Glossary to ARCH (GARCH). Глава в *Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honour of Robert F. Engle* (под редакцией T. Bollerslev, J. R. Russell & M. Watson). Oxford University Press.
- Brownlees C.T., F. Cipollini & G.M. Gallo (2012). Multiplicative error models. Глава в *Volatility Models and Their Applications* под редакцией L. Bauwens, C. Hafner & S. Laurent, Wiley.
- Engle, R.F. & S. Manganelli (2004). CAViAR: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics* 22, 367–381.
- Franses, P.H., T. Teräsvirta & D. van Dijk. (2002). Smooth transition autoregressive models – a survey of recent developments. *Econometric Reviews* 21, 1–47.
- Franses, P. & D. van Dijk (2000). *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance*. New York: Cambridge University Press.
- Hamilton, J.D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica* 57, 357–384.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hansen, B.E. (1997). Inference in TAR models. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 2, 1–14
- Kuester, K., S. Mittnik & M.S. Paolella (2006). Value-at-risk prediction: a comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics* 4, 53–89.
- Nelson, D. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Journal of Econometrics* 43, 227–251.
- Patton, A. (2012). A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis* 110, 4–18.
- Rydberg, T.H. & N. Shephard (2003). Dynamics of trade-by-trade price movements: decomposition and models. *Journal of Financial Econometrics* 1, 2–25.
- Teräsvirta, T. (2009). An introduction to univariate GARCH models. Глава в *Handbook of Financial Time Series* (под редакцией T. Andersen, R. Davis, J.-P. Kreiss & T. Mikosch). Springer.
- White, H., T.-H. Kim & S. Manganelli (2010). Modeling autoregressive conditional skewness and kurtosis with multi-quantile CAViAR. Глава в *Volatility and Time Series Econometrics: A Festschrift in Honor of Robert F. Engle* под редакцией J. Russell & M. Watson, Oxford University Press.

# Objects of nonstructural time series modeling

**Stanislav Anatolyev**

*New Economic School, Moscow, Russia*

When modeling time series dynamics one has to decide on the class and type of models to use which depends much on the object to be modeled. This essay briefly overviews the specifics of time series modeling of various objects like conditional mean, conditional variance, conditional quantiles, conditional probabilities and conditional densities. We pay attention to both univariate and multivariate cases. References to narrower but more detailed surveys are given.



# Модели с марковскими переключениями<sup>\*</sup>

Чанг-Минг Куан<sup>†</sup>

Академия наук, Тайбэй, Тайвань

В настоящем эссе обсуждается одна из самых популярных нелинейных моделей временных рядов — модель с марковскими переключениями. В такой модели происходит переключение между различными типами поведения временного ряда в различных режимах; при этом сам механизм переключения контролируется ненаблюдаемой марковской цепью. Мы рассматриваем простую модель с марковскими переключениями для условного среднего, описываем её обобщения, изучаем методы оценивания, обсуждаем инференцию и подробно разбираем два эмпирических примера.

## 1 Введение

В настоящее время при анализе динамики экономических и финансовых переменных широко используются различные модели временных рядов. Ведущими являются линейные модели, такие как авторегрессия (AR), скользящее среднее (MA) или их комбинация (ARMA). Линейные модели временных рядов настолько популярны отчасти из-за того, что они включены в статистические и эконометрические пакеты. Хотя такие модели хорошо зарекомендовали себя во многих приложениях, с помощью них невозможно «ухватить» многие нелинейные закономерности, такие как асимметрия, зависимость от амплитуды и кластеризация волатильности. Например, рост ВВП часто флуктуирует около высокого уровня и более персистентен во время бумов, но остаётся на более низком уровне и менее персистентен во время рецессий. Для таких временных рядов нельзя ожидать, что какая-либо линейная модель будет способна отразить такую разницу в поведении.

За последние два десятилетия можно было наблюдать стремительное развитие моделей нелинейных временных рядов; более подробное изложение см., например, в работах Tong (1990) и Granger & Teräsvirta (1993). Нелинейные временные ряды, однако, не являются панацеей и имеют свои недостатки. Во-первых, реализация нелинейных моделей, как правило, сложна. Например, нелинейные алгоритмы оптимизации часто останавливаются в локальном максимуме пространства параметров. Во-вторых, большинство нелинейных моделей разработаны с целью описания определённых эмпирических закономерностей, и оттого могут быть недостаточно гибкими. Таким образом, успех нелинейной модели в значительной степени зависит от тех данных, к которым она применяется. Исключением здесь являются т.н. *искусственные нейронные сети*, которые благодаря свойству «универсальной аппроксимации» способны «ухватить» любую нелинейную конфигурацию данных; см., например, Kuang & White (1994). Нейронные сети, однако, страдают из-за проблем идентификации, а потому достаточно проблематичны в использовании.

*Модель с марковскими переключениями*, предложенная в работе Hamilton (1989), также известная как *модель с переключениями режимов*, является одной из наиболее популярных нелинейных моделей временных рядов в литературе. Эта модель включает множество структур (уравнений), характеризующих поведение временного ряда в различных режимах. Если

---

<sup>\*</sup>Настоящее эссе написано в 2002 г. Цитировать как: Куан, Чанг-Минг (2013). «Модели с марковскими переключениями», Квантиль, №11, стр. 13–39. Citation: Kuan, Chung-Ming (2013). “Markov switching model,” *Quantile*, No.11, pp. 13–39.

<sup>†</sup>Адрес: Institute of Economics, Academia Sinica, Taipei 115, Taiwan. Электронная почта: [ckuan@econ.sinica.edu.tw](mailto:ckuan@econ.sinica.edu.tw)

разрешить переключение между этими структурами, получившаяся модель сможет улавливать довольно сложные динамические закономерности. Модели с марковскими переключениями отличаются тем, что механизм переключения контролируется ненаблюдаемой переменной, следующей марковскому процессу первого порядка. Марковское свойство, в частности, означает, что текущее значение переменной состояния зависит только от предыдущего её значения. Таким образом, определённая структура может превалировать на протяжении определённого периода времени, после чего сменится другой структурой при переключении режима. Это резко контрастирует с моделью случайных переключений из работы Quandt (1972), в которой переключения независимы по времени. Модель с марковскими переключениями отличается и от моделей *структурных сдвигов*. Тогда как модели с марковскими переключениями характеризуются частыми сдвигами в случайные моменты времени, для моделей структурных сдвигов типичны редкие и полностью экзогенные сдвиги. Таким образом, модель с марковскими переключениями подходит для моделирования автокоррелированных рядов, характеризующихся различным поведением на разных временных интервалах.

Оригинальная модель с марковскими переключениями создана для описания поведения среднего. Эта модель и её модификации нашли широкое применение в описании экономических и финансовых временных рядов; см., например, Hamilton (1988, 1989), Engel & Hamilton (1990), Lam (1990), Garcia & Perron (1996), Goodwin (1993), Diebold, Lee & Weinbach (1994), Engel (1994), Filardo (1994), Ghysels (1994), Sola & Drill (1994), Kim & Yoo (1995), Schaller & van Norden (1997) и Kim & Nelson (1998), среди прочих. Недавно эта модель стала популярной в изучении тайваньских бизнес-циклов, см. Huang, Kuan & Lin (1998), Huang (1999), Chen & Lin (2000a, b), Hsu & Kuan (2001) и Rau, Lin & Li (2001). Учитывая успешность модели с марковскими переключениями для условного среднего, естественно рассмотреть возможность её использования для описания динамики условной дисперсии. Важнейший класс моделей условной дисперсии — GARCH (обобщённые модели авторегрессионной условной гетероскедастичности), введённый в работах Engle (1982) и Bollerslev (1986). В статьях Cai (1994), Hamilton & Susmel (1994) и Gray (1996) изучаются различные ARCH и GARCH модели с марковскими переключениями. Lam & Li (1998) вводят марковское переключение в модель стохастической волатильности Melino & Turnbull (1990), Harvey, Ruiz, & Shephard (1994) и Jacquier, Polson & Rossi (1994). Другие финансовые приложения моделей с марковскими переключениями в условной дисперсии можно найти в работах Hamilton & Lin (1996), Dueker (1997) и Ramchand & Susmel (1998). Chen & Lin (1999) и Lin, Hung & Kuan (2002) применяют такие модели к тайваньским финансовым временным рядам.

Настоящее эссе организовано следующим образом. В разделе 2 мы вводим простую модель с марковскими переключениями для условного среднего и её обобщения. В разделе 3 мы изучаем два метода оценивания (метод максимального квазиправдоподобия и сэмплирование Гиббса), а инференцию обсуждаем в разделе 4. Раздел 5 представляет эмпирическое исследование тайваньских бизнес-циклов на базе двумерных моделей с марковскими переключениями. В разделе 6 представлена модель с марковскими переключениями для условной дисперсии. В разделе 7 проводится эмпирический анализ краткосрочных процентных ставок на Тайване. Раздел 8 завершает эссе. Заинтересованные читатели могут обращаться к книге Hamilton (1994) за детальным описанием моделей с марковскими переключениями. Более подробное описание модели и её приложений можно найти в Kim & Nelson (1999); компьютерные программы (написанные С. J. Kim в GAUSS), реализующие модель, доступны на сайте [www.econ.washington.edu/user/cnelson/SSMARKOV.htm](http://www.econ.washington.edu/user/cnelson/SSMARKOV.htm). Некоторые программы, написанные Y.-L. Huang, S.-H. Hsu и автором настоящего эссе, могут быть предоставлены по запросу.

## 2 Марковские переключения для условного среднего

Многочисленные эмпирические исследования показывают, что экономические и финансовые временные ряды могут характеризоваться различными динамическими паттернами в разные периоды времени. Вместо использования единственной модели для условного среднего, естественно рассмотреть несколько моделей для улавливания меняющихся закономерностей. Модель с марковскими переключениями строится комбинированием двух или более динамических моделей с помощью механизма переключения. Следуя работам Hamilton (1989, 1994), мы сконцентрируем внимание на модели AR с марковскими переключениями. В настоящем разделе мы сначала проиллюстрируем характерные черты марковского механизма переключения на простейшей модели, а потом обсудим более общие спецификации.

### 2.1 Простейшая модель

Обозначим за  $s_t$  ненаблюдаемую переменную состояния, принимающую значения 0 или 1. Простейшая модель переключения для переменной  $z_t$  состоит из двух спецификаций типа AR:

$$z_t = \begin{cases} \alpha_0 + \beta z_{t-1} + \varepsilon_t, & s_t = 0, \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \beta z_{t-1} + \varepsilon_t, & s_t = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $|\beta| < 1$  и  $\varepsilon_t \sim iid$  с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ . Это стационарный AR(1) процесс со средним  $\alpha_0/(1 - \beta)$  при  $s_t = 0$  и переключающийся на другой стационарный AR(1) процесс со средним  $(\alpha_0 + \alpha_1)/(1 - \beta)$ , когда  $s_t$  переключается с 0 на 1. Таким образом, если  $\alpha_1 \neq 0$ , такая модель характеризуется двумя динамическими паттернами в зависимости от значения переменной состояния  $s_t$ . В этом случае  $z_t$  управляется двумя распределениями с разным средним, а переменная  $s_t$  отвечает за переключение между этими распределениями (режимами).

Если  $s_t = 0$  при  $t = 1, \dots, \tau_0$  и  $s_t = 1$  при  $t = \tau_0 + 1, \dots, T$ , модель (1) имеет единственный структурный сдвиг, при котором параметр модели резко изменяется только после  $t = \tau_0$ . Если  $s_t$  — независимые бернуллиевские случайные величины, модель превращается в модель случайных переключений Quandt (1972). В этой модели  $s_t$  не зависит от предыдущих и будущих реализаций, поэтому  $z_t$  может сильно «прыгать» (часто переключаться между разными состояниями). Если  $s_t = \mathbf{1}_{\{\lambda_t \leq c\}}$ , т.е.  $s_t$  принимает значения 0 или 1 в зависимости от расположения  $\lambda_t$  относительно порога  $c$ , то уравнение (1) становится *пороговой моделью*. В качестве переменной  $\lambda_t$  часто используется лаг зависимой переменной  $z_{t-d}$ .

Несмотря на то, что все эти модели способны уловить смену динамического поведения в двух режимах, каждая из них имеет свои недостатки. Модель с единственным структурным сдвигом слишком ограничена. Хотя очень просто обобщить эту модель на случай многократных структурных сдвигов, полученную модель обычно сложно оценивать и тестировать гипотезы для неё, см., например, Bai & Perron (1998) и Bai (1999). Более того, сдвиги в таких моделях происходят в экзогенные моменты времени. Модель со случайными переключениями, однако, позволяет легко моделировать множественные сдвиги, но её переменные состояния по-прежнему экзогенны. Существенным недостатком последней является также независимость переменных состояния по времени, а значит, её неприменимость к временным рядам. С другой стороны, переключения в пороговой модели зависимы и эндогенны и приводят к множественным сдвигам. К сожалению, однако, выбор подходящей переменной  $\lambda_t$  и порога  $c$  является сложной задачей.

Одним из подходов к преодолению вышеописанных проблем является выбор иной спецификации для  $s_t$ . Предположим, например, что  $s_t$  есть марковская цепь первого порядка со

следующей матрицей переходных вероятностей:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(s_t = 0 | s_{t-1} = 0) & \mathbb{P}(s_t = 1 | s_{t-1} = 0) \\ \mathbb{P}(s_t = 0 | s_{t-1} = 1) & \mathbb{P}(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} \\ p_{01} & p_{11} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где за  $p_{ij}$  ( $i, j = 0, 1$ ) обозначена вероятность перехода в состояние  $s_t = j$  из состояния  $s_{t-1} = i$ . Ясно, что вероятности перехода удовлетворяют  $p_{i0} + p_{i1} = 1$ . Матрица перехода управляет случайным поведением переменной состояния и зависит только от двух параметров ( $p_{00}$  и  $p_{11}$ ). Модель (1) с марковской переменной состояния и называется моделью с марковскими переключениями. Впервые марковский механизм переключения был рассмотрен в работе Goldfeld & Quandt (1973). Hamilton (1989) проводит тщательный анализ этой модели и методов её оценивания; см. также Hamilton (1994) и Kim & Nelson (1999).

В модели с марковскими переключениями свойства  $z_t$  определяются характеристиками распределения как инноваций  $\varepsilon_t$ , так и переменной состояния  $s_t$ . В частности, марковская переменная состояния приводит к случайным и частым сменам режима, а вероятности перехода определяют персистентность каждого из режимов. Надо заметить, что пороговая модель обладает схожими свойствами; однако модель с марковскими переключениями относительно проста в имплементации, так как не требует выбора пороговой переменной  $\lambda_t$  априори. Вместо этого, классификация режимов в данной модели имеет вероятностный характер и определяется данными. Модель с марковскими переключениями, однако, сложно интерпретировать, так как переменные состояния ненаблюдаемы.

### 3 Некоторые обобщения

Модель (1) легко обобщается на более сложные динамические паттерны. Рассмотрим сначала непосредственное обобщение модели (1):

$$z_t = \alpha_0 + \alpha_1 s_t + \beta_1 z_{t-1} + \dots + \beta_k z_{t-k} + \varepsilon_t, \quad (3)$$

где  $s_t = 0, 1$  — марковские переменные состояния с переходной матрицей (2), а  $\varepsilon_t \sim iid$  с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2$ . Это модель AR(k) с изменяющимся свободным членом.

Для  $d$ -мерного временного ряда  $\{\mathbf{z}_t\}$  мы записываем (3) в виде

$$\mathbf{z}_t = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 s_t + \mathbf{B}_1 z_{t-1} + \dots + \mathbf{B}_k z_{t-k} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (4)$$

где  $s_t = 0, 1$  по-прежнему марковские переменные состояния с матрицей перехода (2),  $\mathbf{B}_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) есть  $d \times d$  матрицы параметров, а  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim iid$  случайные векторы с нулевым средним и ковариационной матрицей  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ . Очевидно, уравнение (4) задаёт векторную авторегрессию VAR с изменяющимся свободным членом. Это обобщение просто, но требование одновременного переключения по всем  $d$  переменным не всегда реалистично.

До настоящего времени мы рассматривали модель с марковскими переключениями между двумя режимами, так как переменная состояния бинарна. Возможны и дальнейшие обобщения таких моделей. Например, можно позволить переменной состояния принимать  $m > 2$  значений, получив таким образом модель с  $m$  состояниями. Такие модели мало чем отличаются от моделей, рассмотренных выше, кроме того, что матрица перехода  $\mathbf{P}$  должна быть подходящим образом расширена. Можно также позволить переменной  $z_t$  зависеть как от прошлых, так и от текущего значений переменной состояния. А именно, положим  $\tilde{z}_t = z_t - \alpha_0 - \alpha_1 s_t$  и постулируем следующую модель:

$$\tilde{z}_t = \beta_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \beta_k \tilde{z}_{t-k} + \varepsilon_t. \quad (5)$$

Тогда  $\tilde{z}_t$  (а значит и  $z_t$ ) зависит не только от  $s_t$ , но также и от  $s_{t-1}, \dots, s_{t-k}$ . Так как вектор  $(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-k})$  может принимать  $2^{k+1}$  возможных значений, модель (5) по существу

является моделью (3) с  $2^{k+1}$  состояниями. Ещё одним обобщением может быть зависимость переходных вероятностей от времени. Например, переходные вероятности можно постулировать функциями от каких-либо экзогенных переменных, которые могут меняться во времени. Ясно, что модель с марковскими переключениями ещё более гибкая, однако зависит от большего числа параметров.

## 4 Марковский тренд

Модель с марковскими переключениями и её модификации, обсуждённые в предыдущих разделах, подходят только для стационарных данных. Пусть  $y_t$  — наблюдаемый временной ряд с единичным корнем. Тогда модель с марковскими переключениями нужно применять к разностям  $z_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ . Если  $y_t$  — квартальные данные с сезонным единичным корнем, то модель с марковскими переключениями применяется к разностям  $z_t = \Delta_4 y_t = y_t - y_{t-4}$ .

Если  $y_t$  имеет единичный корень, изменяющийся свободный член в  $z_t$  приводит к детерминистическому тренду со сдвигами в  $y_t$ . Если  $z_t$  задаётся уравнением (3), то  $y_t$  может быть записан в виде

$$y_t = \left( \alpha_0 t + \alpha_1 \sum_{i=1}^t s_i \right) + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_k y_{t-k} + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \quad (6)$$

где два слагаемых в скобках представляют собой тренд со сдвигами, вторая группа слагаемых есть динамическая компонента, а последнее слагаемое  $\sum_{i=1}^t \varepsilon_i$  является стохастическим трендом. Ясно, что функция тренда зависит от  $s_t$ ; получаемый тренд называется *марковским трендом*. «Основной» коэффициент наклона тренда равен  $\alpha_0$ . Если есть только одна переменная  $s_i = 1$ , функция тренда сдвигается вверх (вниз) на  $\alpha_1$ ; когда переменные  $s_i$  принимают значение 1 несколько раз подряд, они меняют наклон функции тренда. Наклон тренда снова станет равным  $\alpha_0$ , когда  $s_i$  переключится на значение 0. На Рис. 1 представлены две реализации марковского тренда, где чёрными метками отмечены периоды с  $s_i = 1$ . На левом рисунке представлен тренд с  $\alpha_0 > 0$  и  $\alpha_1 > 0$ ; на правом рисунке представлен тренд с  $\alpha_0 > 0$  и  $\alpha_1 < 0$ . Видно, что обе реализации имеют изломы.

## 5 Оценивание модели

Существует множество способов оценивания модели с марковскими переключениями, см., например, Hamilton (1989, 1990, 1994), Kim (1994) и Kim & Nelson (1999). В настоящем разделе мы концентрируем внимание на модели (3) и обсуждаем её оценивание методом максимального квазиправдоподобия и *сэмплирования Гиббса*; оценивание (4) полностью аналогично, с незначительными изменениями. Мы также рассматриваем оценивание более общей модели (5) в приложении А.

### 5.1 Оценивание методом максимального квазиправдоподобия

Для модели (3) вектор параметров имеет вид

$$\boldsymbol{\theta} = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_k, \sigma_\varepsilon^2, p_{00}, p_{11})'$$

Обозначим за  $\mathcal{Z}^t = \{z_t, z_{t-1}, \dots, z_1\}$  переменные, наблюдаемые до момента  $t$  включительно, т.е. информационное множество момента  $t$ . Тогда  $\mathcal{Z}^T$  есть информация, полученная из всей выборки. Чтобы оценить функцию правдоподобия для  $s_t$ , важно уметь вычислять оптимальные прогнозы (условные математические ожидания)  $s_t$  для разных информационных множеств. Такими прогнозами являются *вероятности предсказания*  $\mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta})$ ,

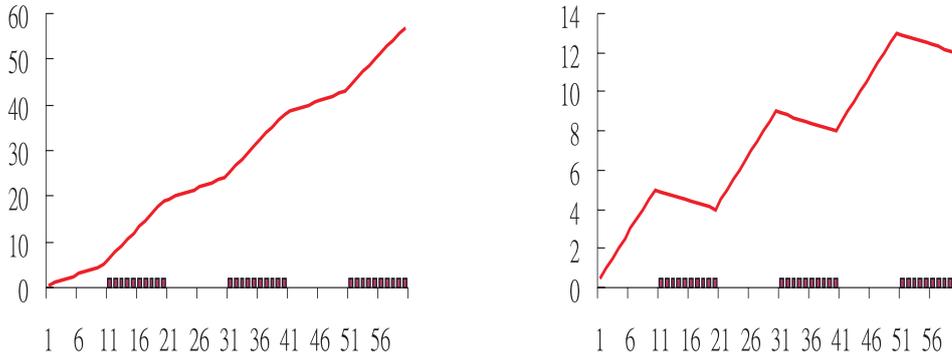


Рис. 1: Функция Марковского тренда с  $\alpha_1 > 0$  (слева) и  $\alpha_1 < 0$  (справа).

строящиеся на информации, полученной до момента времени  $t$ , вероятности фильтрации  $\mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta})$ , вычисляемые на основе прошлой и текущей информации, и *сглаживающие вероятности*  $\mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta})$ , основывающиеся на всей выборке. В качестве побочного продукта при выводе этих вероятностей мы получим логарифм функции квазиправдоподобия, из которой можно будет получить оценки метода максимального квазиправдоподобия (QMLE).

В предположении о нормальности плотность  $z_t$  условно на  $\mathcal{Z}^{t-1}$  и  $s_t = i$  ( $i = 0, 1$ ) записывается в виде

$$f(z_t | s_t = i, \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left\{ -\frac{(z_t - \alpha_0 - \alpha_1 i - \beta_1 z_{t-1} - \dots - \beta_k z_{t-k})^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right\}. \quad (7)$$

При известной вероятности предсказания  $\mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta})$  плотность  $z_t$  условно лишь на  $\mathcal{Z}^{t-1}$  может быть получена из (7):

$$f(z_t | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \mathbb{P}(s_t = 0 | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) f(z_t | s_t = 0, \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) + \mathbb{P}(s_t = 1 | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) f(z_t | s_t = 1, \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}). \quad (8)$$

Для  $i = 0, 1$  вероятности фильтрации для  $s_t$  можно записать как

$$\mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) f(z_t | s_t = i, \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{f(z_t | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta})} \quad (9)$$

по теореме Байеса, а соотношение между вероятностями фильтрации и предсказания есть

$$\mathbb{P}(s_{t+1} = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}) = p_{0i} \mathbb{P}(s_t = 0 | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}) + p_{1i} \mathbb{P}(s_t = 1 | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}), \quad (10)$$

где  $p_{0i} = \mathbb{P}(s_{t+1} = i | s_t = 0)$  и  $p_{1i} = \mathbb{P}(s_{t+1} = i | s_t = 1)$  — вероятности перехода. Заметим, что уравнения (7)–(10) образуют рекурсивную систему для  $t = k, \dots, T$ .

Имея начальные значения  $\mathbb{P}(s_k = i | \mathcal{Z}^{k-1}; \boldsymbol{\theta})$ ,<sup>1</sup> можно проитерировать уравнения (7)–(10) с тем, чтобы получить вероятности фильтрации  $\mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta})$ , а также условные плотности

<sup>1</sup>Hamilton (1994, стр. 684) предлагает в качестве начальных значений  $\mathbb{P}(s_k = i | \mathcal{Z}^{k-1}; \boldsymbol{\theta})$  взять безусловный аналог: третий столбец матрицы  $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$ , где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{P} \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix},$$

с единичной матрицей  $\mathbf{I}$  и столбцом  $\mathbf{1}$  из двух единиц.

$f(z_t | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta})$  для всех  $t = k, \dots, T$ . Логарифм функции квазиправдоподобия записывается теперь как

$$\mathcal{L}_T(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log f(z_t | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}),$$

т.е. является сложной функцией параметров  $\boldsymbol{\theta}$ . QMLE-оценка  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  может быть найдена численным алгоритмом. Например, пакет GAUSS использует алгоритм BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). Оценённые вероятности фильтрации и предсказания затем легко вычисляются подстановкой  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  в соответствующие формулы.

Чтобы вычислить сглаживающие вероятности  $\mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta})$ , мы следуем подходу из работы Kim (1994). Замечая, что

$$\mathbb{P}(s_t = i | s_{t+1} = j, \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta}) = \mathbb{P}(s_t = i | s_{t+1} = j, \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}) = \frac{p_{ij} \mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta})}{\mathbb{P}(s_{t+1} = j | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta})}$$

для  $i, j = 0, 1$ , мы можем выразить сглаживающие вероятности как

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta}) &= \mathbb{P}(s_{t+1} = 0 | \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta}) \mathbb{P}(s_t = i | s_{t+1} = 0, \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta}) + \\ &\quad + \mathbb{P}(s_{t+1} = 1 | \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta}) \mathbb{P}(s_t = i | s_{t+1} = 1, \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta}) = \\ &= \mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}) \cdot \left( \frac{p_{i0} \mathbb{P}(s_{t+1} = 0 | \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta})}{\mathbb{P}(s_{t+1} = 0 | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta})} + \frac{p_{i1} \mathbb{P}(s_{t+1} = 1 | \mathcal{Z}^T; \boldsymbol{\theta})}{\mathbb{P}(s_{t+1} = 1 | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta})} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя вероятность фильтрации  $\mathbb{P}(s_t = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta})$  в качестве начального значения, мы можем проитерировать уравнения (9), (10) и (11) в обратной последовательности, чтобы получить сглаживающие вероятности для  $t = T-1, \dots, k+1$ . Эти вероятности также являются функциями параметров  $\boldsymbol{\theta}$ ; подставляя QMLE-оценку  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  в формулы, получаем оценённые сглаживающие вероятности.

## 5.2 Оценивание сэмплированием Гиббса

Альтернативным подходом к оцениванию моделей с марковскими переключениями является сэмплирование Гиббса, см., например, Albert & Chib (1993) и McCulloch & Tsay (1994). Сэмплирование Гиббса является частным случаем метода симуляций типа Монте-Карло марковских цепей (Markov Chain Monte Carlo, MCMC), предложенным в работе Geman & Geman (1984) для задач обработки изображений и сильно связанным с идеей расширения данных Tanner & Wong (1987).

Подобно байесовскому анализу, в этом методе параметры считаются случайными величинами. Предположим, что параметр  $\boldsymbol{\theta}$  может быть разбит на  $k$  групп:

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_1, \boldsymbol{\theta}'_2, \dots, \boldsymbol{\theta}'_k)'$$

Наблюдая данные  $\mathcal{Z}^T$ , обозначим за

$$\pi(\boldsymbol{\theta}_i | \mathcal{Z}^T, \{\boldsymbol{\theta}_j, j \neq i\}), \quad i = 1, \dots, k$$

полное условное распределение  $\boldsymbol{\theta}_i$ , являющееся также *условным апостериорным распределением* в Байесовском анализе. Постулируя априорное распределение параметров и функции правдоподобия, можно получить условные апостериорные распределения.

Сэмплер Гиббса начинается с  $k$  условных апостериорных распределений и случайно сгенерированных начальных значений

$$\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\boldsymbol{\theta}_1^{(0)'}, \boldsymbol{\theta}_2^{(0)'}, \dots, \boldsymbol{\theta}_k^{(0)'})'$$

Тогда  $i$ -ая реализация вектора  $\boldsymbol{\theta}$  получается следующим образом.

1. Реализация  $\theta_1$  генерируется случайно из полного условного распределения

$$\pi(\theta_1 | \mathcal{Z}^T; \theta_2^{(i-1)}, \dots, \theta_k^{(i-1)}).$$

Обозначим эту реализацию за  $\theta_1^{(i)}$ .

2. Реализация  $\theta_2$  генерируется случайно из полного условного распределения

$$\pi(\theta_2 | \mathcal{Z}^T; \theta_1^{(i)}, \theta_3^{(i)}, \dots, \theta_k^{(i-1)}).$$

Обозначим эту реализацию за  $\theta_2^{(i)}$ .

3. Аналогичная процедура повторяется для  $\theta_3^{(i)}, \dots, \theta_k^{(i)}$ .

Тогда  $i$ -ой реализацией вектора  $\theta$  будем

$$\theta^{(i)} = (\theta_1^{(i)'}, \theta_2^{(i)'}, \dots, \theta_k^{(i)'})'.$$

Повторяя описанную процедуру  $N$  раз, получим гиббсовскую последовательность  $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(N)}\}$ . Теперь мы можем вычислить  $N$  полных условных распределений для  $\theta^{(i)}$  на основе гиббсовской последовательности. Например, полные условные распределения для  $\theta^{(1)}$  есть

$$\pi(\theta_1 | \mathcal{Z}^T; \theta_2^{(i)}, \dots, \theta_k^{(i)}), \quad k = 1, \dots, N.$$

Чтобы избавиться от эффекта начальных значений, в гиббсовской последовательности обычно пропускают первые  $N_1$  оценок и пользуются только оставшимися  $N - N_1$  оценками.

Geman & Geman (1984) показали, что гиббсовская последовательность экспоненциально быстро сходится по распределению к истинному распределению вектора  $\theta$ , т.е.

$$\theta^{(N)} \xrightarrow{d} \pi(\theta | \mathcal{Z}^T)$$

при  $N \rightarrow \infty$ , и что каждый подвектор  $\theta_i^{(N)}$  также экспоненциально быстро сходится по распределению к истинному маргинальному распределению  $\theta_i$ . Более того, для любой измеримой функции  $g$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\theta^{(i)}) \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}[g(\theta)],$$

где символы  $\xrightarrow{\text{a.s.}}$  означают сходимость с вероятностью 1. В работах Gelfand & Smith (1990), Casella & George (1992) и Chib & Greenberg (1996) можно более детально ознакомиться со свойствами сэмплинга Гиббса.

В текущей постановке задачи наряду с вектором параметров  $\theta$  ненаблюдаемые переменные состояния  $s_t$ ,  $t = 1, \dots, T$  также считаются параметрами. Расширенный вектор параметров тогда может быть отнесён к одной из четырёх групп: переменные состояния  $s_t$ , переходные вероятности  $p_{00}$  и  $p_{11}$ , свободный член и коэффициенты наклона  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_k$  и дисперсия  $\sigma_\varepsilon^2$ . Случайный сэмплинг из условного апостериорного распределения даёт гиббсовскую последовательность. Тогда выборочное среднее этой последовательности и является оценкой неизвестных параметров.

## 6 Тестирование гипотез

Чтобы оценить адекватность модели с марковскими переключениями, естественно рассмотреть следующие гипотезы: (1) изменяющиеся параметры (свободные члены) на самом деле постоянны; (2) переменные состояния независимы. Отвержение первой гипотезы говорит о том, что переключение скорее всего не происходит. Невозможность отвергнуть вторую гипотезу свидетельствует против марковской структуры, однако отвержение второй гипотезы только частично поддерживает предположение о марковском переключении. Также может быть необходимо протестировать значимость параметров модели или гипотезу о (не)линейных соотношениях между ними. В настоящем разделе мы обсудим, как делается такая инференция.

### 6.1 Тестирование изменений параметров

Первая гипотеза состоит в том, что  $\alpha_1 = 0$ . Когда эта гипотеза верна, одного уравнения достаточно для описания  $z_t$ , и значит (3) превращается в простую AR(k) модель. Таким образом, значения  $p_{00}$  и  $p_{11}$  не влияют на значения максимального квазиправдоподобия. Иными словами, параметры  $p_{00}$  и  $p_{11}$  неидентифицируемы при нулевой гипотезе; такие параметры называются *мешающими* или *шумовыми*. Известно, что в случае наличия неидентифицируемых параметров при нулевой гипотезе функция квазиправдоподобия постоянна на них и поэтому не имеет единственного максимума. Следовательно, стандартные тесты, основанные на правдоподобии, неприменимы, см. Davies (1977, 1987) и Hansen (1996b), что представляет серьёзную трудность в тестировании гипотез.

Мы представим «консервативную» процедуру тестирования, предложенную в работах Hansen (1992, 1996a). Следует заметить, что асимптотическая теория теста из работы Garcia (1998) может быть неприменима. Разбиение вектора параметров

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\theta}'_1)' = (\alpha_1, p_{00}, p_{11}, \boldsymbol{\theta}'_1)',$$

где  $\mathbf{p}' = (p_{00}, p_{11})$  — вектор параметров, неидентифицируемых при нулевой гипотезе. При фиксированных  $\boldsymbol{\gamma} = (\alpha_1, p_{00}, p_{11})'$  концентрированная QMLE-оценка вектора  $\boldsymbol{\theta}_1$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(\boldsymbol{\gamma}) = \arg \max L_T(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\theta}_1)$$

сходится по распределению, скажем, к  $\boldsymbol{\theta}_1(\boldsymbol{\gamma})$ . Концентрированные логарифмические функции квазиправдоподобия в точках  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1(\boldsymbol{\gamma})$  и  $\boldsymbol{\theta}_1(\boldsymbol{\gamma})$  имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{L}_T(\boldsymbol{\gamma}) &= L_T(\boldsymbol{\gamma}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(\boldsymbol{\gamma})), \\ L_T(\boldsymbol{\gamma}) &= L_T(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\theta}_1(\boldsymbol{\gamma})). \end{aligned}$$

Отсюда получаем статистики отношения правдоподобия

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{LR}}_T(\boldsymbol{\gamma}) &= \hat{L}_T(\boldsymbol{\gamma}) - \hat{L}_T(0, p_{00}, p_{11}), \\ \mathcal{LR}_T(\boldsymbol{\gamma}) &= L_T(\boldsymbol{\gamma}) - L_T(0, p_{00}, p_{11}), \end{aligned}$$

где  $\hat{L}_T(0, \mathbf{p})$  и  $L_T(0, \mathbf{p})$  — концентрированные логарифмические функции квазиправдоподобия при нулевой гипотезе. Так как  $\boldsymbol{\gamma}$  содержит мешающие параметры, естественно рассмотреть отношения правдоподобия для всех возможных значений  $\boldsymbol{\gamma}$ . Такие рассуждения мотивируют супремум-статистику  $\sup_{\boldsymbol{\gamma}} \sqrt{T} \widehat{\mathcal{LR}}_T(\boldsymbol{\gamma})$ ; см. также Andrews (1993), где аналогичный тест описан в контексте тестирования структурных сдвигов в неизвестные моменты времени.

Принимая во внимание уравнения (А.1), (А.2) и (8) из работы Hansen (1992),<sup>2</sup> имеем

$$\sqrt{T} \left( \hat{L}_T(\gamma) - L_T(\gamma) \right) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Следовательно, при нулевой гипотезе

$$\begin{aligned} \sqrt{T} \widehat{\mathcal{LR}}_T(\gamma) &= \sqrt{T} \left( \widehat{\mathcal{LR}}_T(\gamma) - \mathcal{LR}_T(\gamma) \right) + \sqrt{T} \left( \mathcal{LR}_T(\gamma) - M_T(\gamma) \right) + \sqrt{T} M_T(\gamma) = \\ &= \sqrt{T} \left( \mathcal{LR}_T(\gamma) - M_T(\gamma) \right) + \sqrt{T} M_T(\gamma) + o_{\mathbb{P}}(1), \end{aligned}$$

где  $M_T(\gamma) = \mathbb{E}[\mathcal{LR}_T(\gamma)]$  неположительно при нулевой гипотезе. Следовательно,

$$\sqrt{T} \widehat{\mathcal{LR}}_T(\gamma) \leq \sqrt{T} Q_T(\gamma) + o_{\mathbb{P}}(1), \quad (12)$$

где  $Q_T(\gamma) = \mathcal{LR}_T(\gamma) - M_T(\gamma)$ . При некоторых подходящих условиях выполняется центральная предельная теорема (ЦПТ) для эмпирических процессов, т.е.

$$\sqrt{T} Q_T(\gamma) \Rightarrow Q(\gamma), \quad (13)$$

где символ  $\Rightarrow$  означает слабую сходимость (соответствующих вероятностных мер), а  $Q$  есть гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией  $K(\gamma_1, \gamma_2)$ . Заметим, что ЦПТ для эмпирических процессов аналогична функциональной ЦПТ; детали можно найти в работе Andrews (1991). Уравнения (12) и (13) означают, что когда  $T$  достаточно велико,  $Q(\gamma)$  является приблизительной верхней границей для  $\sqrt{T} \widehat{\mathcal{LR}}_T(\gamma)$  для любого  $\gamma$ . Таким образом, при нулевой гипотезе

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{\gamma} \widehat{\mathcal{LR}}_T(\gamma) > c \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{\gamma} Q_T(\gamma) > c \right\}. \quad (14)$$

Результат (14) показывает, что при заданном уровне значимости критическое значение для  $\sup_{\theta} \widehat{\mathcal{LR}}_T(\gamma)$  меньше, чем для  $\sup_{\theta} Q_T(\gamma)$ .

На основе вышеприведённых вычислений, Hansen (1992) предложил использовать стандартизованную супремум-статистику

$$\sup_{\gamma} \widehat{\mathcal{LR}}_T^*(\gamma) = \sup_{\gamma} \widehat{\mathcal{LR}}_T(\gamma) / \hat{V}_T(\gamma)^{1/2}, \quad (15)$$

где  $\hat{V}_T(\gamma)$  — оценка дисперсии; её точную форму можно найти в работе Hansen (1992). Обозначим за  $V_T(\gamma)$  вероятностный предел  $\hat{V}_T(\gamma)$ . В силу (12) и (13) статистика Хансена удовлетворяет соотношениям

$$\sup_{\gamma} \widehat{\mathcal{LR}}_T^*(\gamma) \leq \sup_{\gamma} Q_T(\gamma) / \hat{V}_T(\gamma)^{1/2} + o_{\mathbb{P}}(1) \Rightarrow \sup_{\gamma} Q^*(\gamma),$$

где  $Q^*(\gamma) = Q(\gamma) / V(\gamma)^{1/2}$  также гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией  $K^*(\gamma_1, \gamma_2) = K(\gamma_1, \gamma_2) / [V(\gamma_1)^{1/2} V(\gamma_2)^{1/2}]$ . Аналогично (14), имеем

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{\gamma} \widehat{\mathcal{LR}}_T^*(\gamma) > c \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{\gamma} Q^*(\gamma) > c \right\}.$$

Таким образом, при заданном уровне значимости критическое значение для  $\sup_{\gamma} \widehat{\mathcal{LR}}_T^*(\gamma)$  меньше, чем для  $\sup_{\gamma} Q^*(\gamma)$ . Это наводит на мысль о том, что даже когда распределение

<sup>2</sup>Необходимо заметить, что в наших обозначениях  $\hat{L}_T$  и  $L_T$  являются *средними* по индивидуальным логарифмам правдоподобий, тогда как в работа Hansen (1992) так обозначены суммы индивидуальных логарифмов правдоподобий.

стандартизованной супремум-статистики неизвестно, мы можем использовать  $\sup_{\gamma} Q_T^*(\gamma)$  для получения «консервативных» критических значений для стандартизованной супремум-статистики (такие критические значения имеют истинный уровень значимости меньший номинального). Эти критические значения больше необходимого уровня, а значит негативно влияют на мощность теста. Hansen (1992) также предложил использовать симуляции распределения  $\sup_{\gamma} Q_T^*(\gamma)$ . Реализация теста Хансена вычислительно сложна; мы обсудим её детали в приложении В.

## 6.2 Тестирование других гипотез

Рассмотрим теперь тест на независимость переменных состояния. Заметим, что если  $p_{00} = p_{10}$  и  $p_{01} = p_{11}$ , то вероятность того, что переменная состояния примет значение 0 (или 1) не зависит от предыдущего состояния. Таким образом, предыдущее состояние не влияет на текущее, поэтому переменные состояния независимы. Так как  $p_{00} + p_{01} = 1$  и  $p_{10} + p_{11} = 1$ , нулевую гипотезу о независимости переменных состояния можно компактно записать в виде

$$H_0: p_{00} + p_{11} = 1.$$

Если мы отвергаем первую гипотезу, введённую в предыдущем параграфе, проблема «мешающих параметров» исчезает. Следовательно, гипотезу о независимости переменных состояния можно тестировать стандартными тестами правдоподобия; см. также Hamilton (1996). Мы не будем рассматривать эти тесты.

## 7 Эмпирика: исследование тайваньских бизнес-циклов

При обсуждении бизнес циклов Lucas (1977) отмечает совместное движение таких важных экономических переменных как производство, потребление, инвестиции и занятость. Diebold & Rudebusch (1996) предлагают строить модели бизнес-циклов со следующими двумя характеристиками: совместное движение экономических переменных и персистентность состояний экономики. Ясно, что одномерная модель с марковскими переключениями обладает последней чертой, но не первой. Таким образом, следует рассмотреть многомерную модель.

Существуют многочисленные приложения моделей с марковскими переключениями к бизнес-циклам, см., например, Hamilton (1989), Lam (1990), Goodwin (1993), Diebold, Lee & Weinbach (1994), Durland & McCurdy (1994), Filardo (1994), Ghysels (1994), Kim & Yoo (1995), Filardo & Gordon (1998) и Kim & Nelson (1998). Что касается тайваньских бизнес-циклов, Huang, Kuan & Lin (1998), Huang (1999) и Chen & Lin (2000a) применяли одномерные модели с марковскими переключениями к реальным ВВП и ВНП. В работе Blanchard & Quah (1989), однако, замечено, что моделирование ВВП недостаточно для улавливания эффектов шоков спроса и предложения. Обсуждаемое ниже эмпирическое исследование базируется на работе Hsu & Kuan (2001), применивших двумерную модель с марковскими переключениями к реальному ВВП и росту занятости. Chen & Lin (2000b) также применили двумерную модель для реального ВВП и потребительских расходов. Мы используем занятость вместо потребительских расходов, так как последние сами по себе являются существенной компонентой ВВП.

Квартальные данные по реальному ВВП и занятости взяты из базы данных ARE-MOS Министерства образования. База содержит 151 наблюдение реального ВВП (с первого квартала 1962 года до третьего квартала 1999 года) и 87 наблюдений занятости (с первого квартала 1978 года до третьего квартала 1999 года). Далее по тексту мы обозначаем первый квартал за Q1, второй квартал за Q2 и т.д. Обозначим за  $\zeta_t$  вектор ВВП и занятости. Беря сезонные разности логарифма  $\zeta_t$ , получаем годовые темпы роста  $z_t$ :

$$z_t = \log \zeta_t - \log \zeta_{t-4}.$$

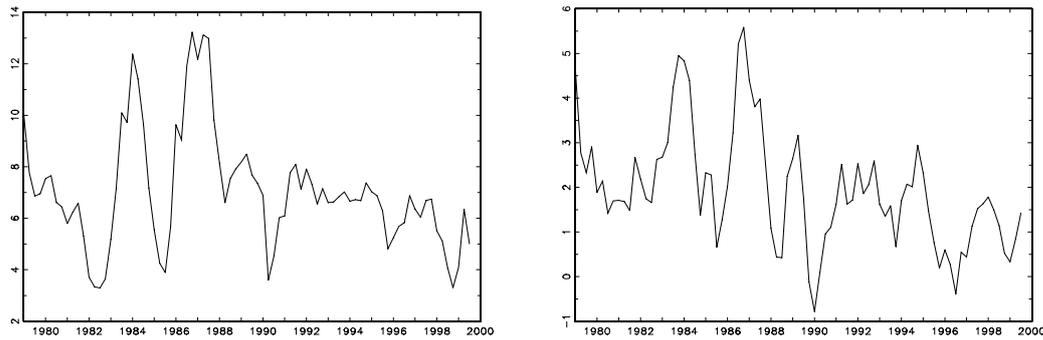


Рис. 2: Темпы роста ВВП (слева) и занятости (справа): 1979Q1 — 1999Q3.

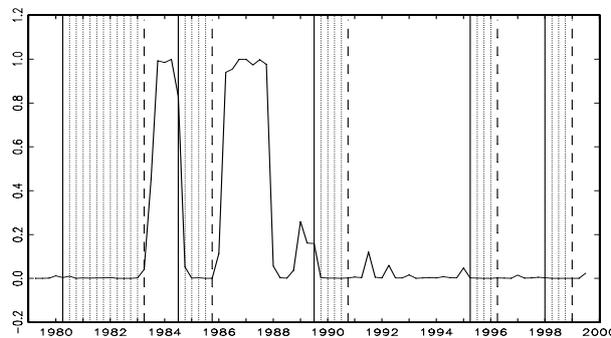


Рис. 3: Сглаживающие вероятности состояния  $s_t = 1$ : двумерная модель, 1979Q1 — 1999Q3.

Темпы роста ВВП и занятости с 1979Q1 до 1999Q3 представлены на Рис. 2. Видно, что для этих двух рядов не наблюдается никакого тренда.

В настоящем разделе оценивание проводилось сэмплированием Гиббса: см. априорные и условные апостериорные распределения в работе Hsu & Kuan (2001). Сначала мы применяем двумерную модель с марковскими переключениями к  $z_t$ , используя все наблюдения (с 1978Q1 до 1999Q3). Результаты оценивания показывают, что  $s_t = 1$  есть состояние стремительного роста. На Рис. 3 демонстрируется график сглаживающих вероятностей  $\mathbb{P}(s_t = 1 | \mathcal{Z}^T)$ , показывающий, что эти вероятности практически нулевые в последние 10 лет, где вертикальные сплошные (прерывистые) линии означают пики (впадины), идентифицируемые Центром экономического планирования и развития (CEPD, Council of Economic Planning and Development) Исполнительного Юаня. Таким образом, очень маловероятно, что находится в режиме стремительного роста в этот период (и очень вероятно, что экономика находится в состоянии слабого роста). Иными словами, модель с марковскими переключениями на основе полной информации не может идентифицировать циклы в 1990-х гг. Однако существующие исследования показывают, что модель с марковскими переключениями достаточно успешна в идентификации тайваньских бизнес-циклов до 1990-х гг. и что результаты близки к полученным CEPD.

Более тщательное изучение данных позволяет заключить, что тайваньская экономика стремительно росла до 1990-х гг., но затем рост существенно замедлился. Например, средние темпы роста ВВП в 1960-х, 1970-х и 1980-х гг. составляли 9,82%, 10,27% и 8,16% соответственно, тогда как средние темпы роста 1990-х гг. находились на уровне всего 6,19%. Это объясняет, почему модель с марковскими переключениями относит все темпы роста в 1990-х гг. к одному состоянию при рассмотрении всей выборки. Несмотря на это, из Рис. 2 мы видим, что экономика Тайваня всё же испытала некоторые взлёты и падения в указанный

период. Вопрос состоит в том, как можно идентифицировать бизнес-циклы в 1990-х гг.

Чтобы справиться с этой задачей, кажется естественным рассмотреть подвыборку наиболее недавних наблюдений. Мы тестируем на структурный сдвиг (в непредопределённый момент времени) в двух временных рядах с помощью теста максимальной статистики Вальда из работы Andrews (1993) и оцениваем момент сдвига методом наименьших квадратов. Для ВВП и занятости максимальная статистика Вальда принимает значения 12,036 и 40,360 соответственно, что превышает 5%-ое критическое значение 9,31. Таким образом, мы отвергаем нулевую гипотезу об отсутствии сдвига среднего. МНК-оценки момента сдвига дают 1989Q4 для ВВП и 1987Q4 для занятости. Мы, стало быть, возьмём подвыборку  $z_t$  с 1989Q4 до 1999Q3.<sup>3</sup> Заметим, что наш способ определения момента сдвига отличается от использованного в работе Rau, Lin & Li (2001).

Результаты оценивания, приведённые в таблице 1, получены применением двумерной модели с марковскими переключениями к сформированной подвыборке. В этой таблице столбцы под названием «Апр. распр.» содержат значения параметров априорных распределений, а столбцы под названием «Апост. распр.» содержат оценки параметров и стандартные ошибки, полученные сэмплированием Гиббса. Отсюда мы можем вычислить оценённые средние темпы роста ВВП: 7,35% в состоянии 1 и 3,26% в состоянии 0. Назовём состояния 1 и 0 режимами стремительного и слабого роста соответственно. Эти оценки существенно меньше полученных в других исследованиях. Например, используя данные по реальному ВВП с 1961Q1 до 1996Q4, модель с двумя состояниями работы Huang (1999) привела к оценкам средних темпов роста в 11,3% и 7,3%.<sup>4</sup> Оценённые темпы роста занятости за периоды стремительного и слабого роста составляют 1,46% и 1,15% соответственно.

Из таблицы 1 видно также, что переходные вероятности  $p_{00} = 0,5619$  и  $p_{11} = 0,6918$ . Эти вероятности также существенно меньше, чем в других исследованиях, и показывают, что оба режима менее персистентны, чем ранее. Например, переходные вероятности для режимов слабого и стремительного роста из работы Huang (1999) составляют 0,927 и 0,804 соответственно, тогда как в работе Huang, Kuan & Lin (1998) они равны 0,927 и 0,956 соответственно. Ожидаемая продолжительность примерно равна  $1/(1 - p_{11}) \approx 3,2$  квартала для режима стремительного роста и  $1/(1 - p_{00}) \approx 2,3$  квартала для режима слабого роста.<sup>5</sup> Эти продолжительности значительно меньше полученных в работе Huang, Kuan & Lin (1998), где они равны 22,7 кварталов в режиме стремительного роста и 13,7 кварталов в режиме слабого роста. Заметим, однако, что оценённые продолжительности из работы Huang (1999) составляют примерно 5 кварталов в режиме стремительного роста и 13,7 в режиме слабого роста. Эти оценки противоречат расхожему мнению, что бумы на Тайване обычно дольше рецессий. Итак, наши результаты показывают, что ожидаемые темпы роста ВВП Тайваня намного меньше и что фазы бизнес-циклов имеют намного меньшие продолжительности в 1990-х гг.

Сглаживающие вероятности события  $s_t = 1$  представлены в таблице 2 и изображены на Рис. 4. Мы используем сглаживающие вероятности для определения пиков и впадин бизнес-цикла с 0,5 в качестве порогового значения для  $s_t = 0$  или 1. Т.о. периоды со сглаживающими вероятностями для  $s_t = 1$  большими (меньшими) чем 0,5, с большей вероятностью являются

<sup>3</sup>Использование такой подвыборки довольно разумно. Средние темпы роста ВВП и занятости составляют 7,81% и 2,56% соответственно до 1990 г. и падают до 6,19% и 1,28% соответственно после 1990 г. Это означает 21%-ое падение темпов роста ВВП и 50%-ое падение темпов роста занятости.

<sup>4</sup>Huang, Kuan & Lin (1998) используют данные по реальному ВВП с 1962Q1 до 1995Q3 и получают оценки средних темпов роста в 10,12% и 5,74%.

<sup>5</sup>Ожидаемая продолжительность режима 0 равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_{00}^{k-1} (1 - p_{00}) = 1/(1 - p_{00}),$$

а ожидаемая продолжительность режима 1 равна  $1/(1 - p_{11})$ ; см. Hamilton (1989, стр. 374).

Таблица 1: Результаты оценивания двумерной модели с марковскими переключениями для роста ВВП и занятости

параметр	Апр. распр.		Апост. распр.	
	среднее	ст. откл.	среднее	ст. отк.
$\alpha_{01}$	2	1	1,1073	0,9113
$\alpha_{02}$	2	1	0,8738	0,8332
$\alpha_{11}$	2	1	2,3538	1,1602
$\alpha_{12}$	2	1	1,4057	1,0251
$b_{11}$	0	1	0,8753	0,2600
$b_{12}$	0	1	-0,2166	0,2590
$b_{13}$	0	1	0,0172	0,3204
$b_{14}$	0	1	0,6703	0,3119
$b_{21}$	0	1	-0,1205	0,3136
$b_{22}$	0	1	0,2590	0,3122
$b_{23}$	0	1	-0,2654	0,3743
$b_{24}$	0	1	0,0434	0,3655
$b_{31}$	0	1	0,1176	0,3004
$b_{32}$	0	1	0,0029	0,2891
$b_{33}$	0	1	0,3936	0,3964
$b_{34}$	0	1	0,2330	0,3422
$b_{41}$	0	1	-0,1672	0,2075
$b_{42}$	0	1	-0,1363	0,2073
$b_{43}$	0	1	-0,2740	0,3192
$b_{44}$	0	1	-0,4507	0,2823
$\sigma_{11}$	1	.	0,9781	4,1622
$\sigma_{12}$	0	.	-0,1305	8,1463
$\sigma_{22}$	1	.	2,1819	35,936
$p_{00}$	0,5	0,0012	0,5619	0,1725
$p_{11}$	0,5	0,0012	0,6918	0,1488

*Примечание:*  $\alpha_{i1}$  и  $\alpha_{i2}$  являются свободными членами для роста ВВП и занятости соответственно при  $s_t = i$ ,  $i = 0, 1$ ; для  $j = 1, \dots, 4$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} b_{j1} & b_{j3} \\ b_{j2} & b_{j4} \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

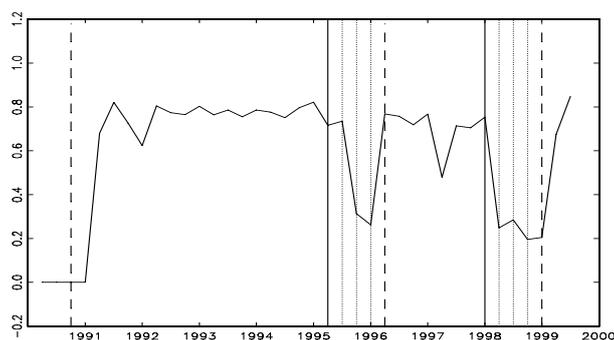


Рис. 4: Сглаживающие вероятности состояния  $s_t = 1$ : двумерная модель, 1990Q1 — 1999Q3.

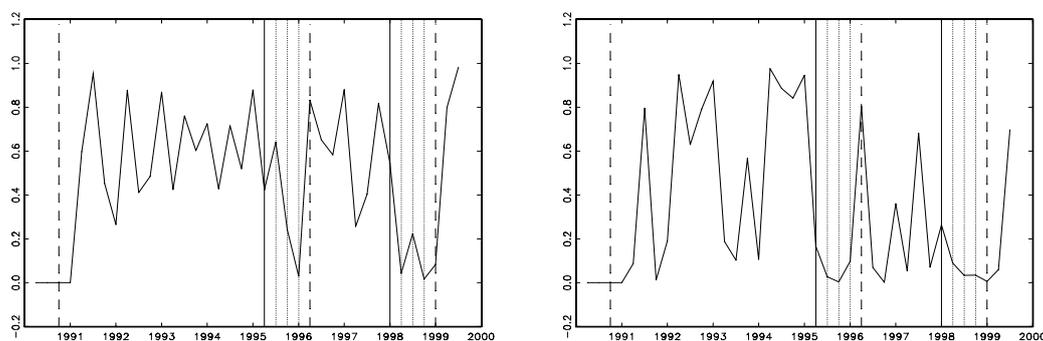


Рис. 5: Сглаживающие вероятности состояния  $s_t = 1$ : одномерная модель для ВВП (слева) и занятости (справа), 1990Q1 — 1999Q3.

режимами стремительного (слабого) роста. Мы также пользуемся простым правилом: последний период со сглаживающей вероятностью большей (меньшей) 0,5 берётся в качестве пика (впадины). Согласно этому правилу, в 1990-х гг. было два полных цикла: один с пиком в 1995Q2 и впадиной в 1995Q4 и другой с пиком в 1997Q4 и впадиной в 1998Q4. Первый цикл ближе всего к 8-му циклу, идентифицированному CEPD (пик в 1995Q1 и впадина 1996Q1), но с более коротким периодом рецессии, тогда как последний согласуется с 9-ым циклом, идентифицированным CEPD. 9-ый цикл показывает, что тайваньская экономика достигла пика, когда азиатский валютный кризис начал распространяться, и был на дне, когда этот кризис подошёл к концу.

Далее, мы используем априорные распределения из таблицы 1 и применяем одномерные модели с марковскими переключениями отдельно к ВВП после сдвига и темпам роста занятости, как в работе Kim & Nelson (1998). Оценённые сглаживающие вероятности для этих двух рядов представлены на Рис. 5. Интересно отметить, что одномерная модель для выборки после сдвига по-прежнему не может идентифицировать никаких циклов в 1990-х гг. Это может означать, что двумерная модель улавливает важные характеристики данных, которые не может «схватить» одномерная модель.

## 8 Марковские переключения для условной дисперсии

В дополнение к модели для условного среднего важно также подключить механизм марковского переключения к моделям условной дисперсии. В настоящем разделе мы сконцентрируемся на GARCH-модели с марковским переключением.

Таблица 2: Оценённые сглаживающие вероятности двумерной модели с марковскими переключениями для роста ВВП и занятости

квартал	вероятность	квартал	вероятность
1990Q1	N/A	1995Q1	0,7158
Q2	N/A	Q2	0,7349
Q3	N/A	Q3	0,3133
Q4	N/A	Q4	0,2622
1991Q1	0,6792	1996Q1	0,7680
Q2	0,8206	Q2	0,7579
Q3	0,7257	Q3	0,7185
Q4	0,6235	Q4	0,7674
1992Q1	0,8042	1997Q1	0,4798
Q2	0,7730	Q2	0,7135
Q3	0,7647	Q3	0,7045
Q4	0,8029	Q4	0,7534
1993Q1	0,7638	1998Q1	0,2484
Q2	0,7856	Q2	0,2851
Q3	0,7549	Q3	0,1952
Q4	0,7864	Q4	0,2041
1994Q1	0,7766	1999Q1	0,6745
Q2	0,7510	Q2	0,8483
Q3	0,7957	Q3	N/A
Q4	0,8218	Q4	N/A

Запишем простейшую GARCH( $p,q$ )-модель в виде  $z_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$ , где

$$h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i z_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i} \quad (16)$$

— условная дисперсия  $z_t$  на информации, известной к моменту  $t-1$ , а  $\varepsilon_t \sim iid$  с нулевым средним и единичной дисперсией. Когда  $h_t$  не зависит от своих лагов, модель становится ARCH( $q$ ). Если  $p = q = 1$ , то имеем GARCH(1,1)-модель:

$$h_t = c + a_1 z_{t-1}^2 + b_1 h_{t-1}.$$

Многочисленные эмпирические исследования показывают, что модели GARCH(1,1) обычно достаточно для описания поведения волатильности многих временных рядов. Интересно, что сумма оценённых коэффициентов  $a_1$  и  $b_1$  обычно близка к единице. Из уравнения (16) можно записать  $z_t^2$  как ARMA:

$$z_t^2 = h_t \varepsilon_t^2 = c + (a_1 + b_1) z_{t-1}^2 - b_1 (z_{t-1}^2 - h_{t-1}) + (z_t^2 - h_t), \quad (17)$$

где  $z_t^2 - h_t$  — инновация с нулевым средним. Таким образом, когда  $a_1 + b_1 = 1$ ,  $z_t^2$  имеет единичный корень, так что ряд  $h_t$  сильно персистентный. В этом случае говорят, что  $\{h_t\}$

следует процессу интегрированного GARCH (IGARCH). Lamoureux & Lastrapes (1990) отмечают, что обнаружение IGARCH-паттернов не имеет теоретического обоснования и может быть следствием неучёта сдвигов в параметрах в GARCH-модели.

Обозначим за  $\Phi_{t-1}$  информационное множество к моменту  $t - 1$  и пусть  $h_{i,t} = \mathbb{V}(z_t | s_t = i, \Phi_{t-1})$ . Cai (1994) рассматривает ARCH( $q$ )-модель с изменяющимся свободным членом:  $z_t = \sqrt{h_{i,t}}\varepsilon_t$ , где

$$h_{i,t} = \alpha_0 + \alpha_1 i + \sum_{j=1}^q a_j z_{t-j}^2, \quad i = 0, 1. \quad (18)$$

Hamilton & Susmel (1994) предложили SWARCH( $q$ )-модель:  $z_t = \sqrt{h_{i,t}}\varepsilon_t$ , где

$$h_{i,t} = \lambda_i \eta_t = \lambda_i \left( c + \sum_{j=1}^q a_j z_{t-j}^2 \right), \quad i = 0, 1. \quad (19)$$

Здесь условные дисперсии в двух режимах пропорциональны друг другу. Ясно, что условные дисперсии модели (18) претерпевают смещения, тогда как в модели (19) они масштабируются. Обе модели являются, разумеется, частными случаями более общей спецификации изменяющихся условных дисперсий.

Обобщение моделей (18) и (19) на случай наличия лагов условных дисперсий нетривиально. Чтобы увидеть это, заметим, что если условная дисперсия  $h_{i,t}$  зависит от  $h_{i,t-1}$ , то она определяется не только  $s_t$ , но также  $s_{t-1}$  в силу наличия  $h_{i,t-1}$ . Далее, зависимость  $h_{i,t-1}$  от  $h_{i,t-2}$  означает, что  $h_{i,t}$  будет зависеть от  $s_{t-2}$  и т.д. Следовательно, условная дисперсия в момент времени  $t$  фактически определяется реализацией  $(s_t, s_{t-1}, \dots, s_1)$ , которая может принимать  $2^t$  возможных значений. Такое свойство «зависимости от пути» приводит к очень сложной модели с плохо интерпретируемыми оценками. Грау (1996) обходит эту проблему, постулируя, что  $h_{i,t}$  зависит от  $h_t = \mathbb{E}[z_t^2 | \Phi_{t-1}]$ , взвешенной по сглаживающим вероятностям  $\mathbb{P}(s_t = i | \Phi_{t-1})$  суммы  $h_{i,t}$ . Таким образом,  $z_t = \sqrt{h_{i,t}}\varepsilon_t$ , где

$$h_{i,t} = c_i + \sum_{j=1}^q a_{i,j} z_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q b_{i,j} h_{t-j}, \quad i = 0, 1, \\ h_t = h_{0,t} \mathbb{P}(s_t = 0 | \Phi_{t-1}) + h_{1,t} \mathbb{P}(s_t = 1 | \Phi_{t-1}). \quad (20)$$

Замечательным свойством (20) является то, что  $h_{i,t}$  больше не зависит от пути в силу того, что как  $h_{0,t-j}$ , так и  $h_{1,t-j}$  теперь формируют  $h_{t-j}$ . Таким образом, эту модель можно применять, не рассматривая всевозможные траектории  $(s_t, \dots, s_1)$ .

Модель Грея легко обобщается на случай переключений в условном среднем и условной дисперсии. Обозначим за  $\mu_{i,t}$  условное среднее  $\mathbb{E}[z_t | s_t = i, \Phi_{t-1}]$  и запишем

$$z_t = \mu_{i,t} + v_{i,t}, \quad v_{i,t} = \sqrt{h_{i,t}}\varepsilon_t, \\ h_{i,t} = c_i + \sum_{j=1}^q a_{i,j} v_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q b_{i,j} h_{t-j}. \quad (21)$$

Необходимо вычислить две взвешенные суммы

$$h_t = \mathbb{E}[z_t^2 | \Phi_{t-1}] - \mathbb{E}[z_t | \Phi_{t-1}]^2, \quad v_t = z_t - \mathbb{E}[z_t | \Phi_{t-1}],$$

где  $\mathbb{E}[z_t | \Phi_{t-1}]$  и  $\mathbb{E}[z_t^2 | \Phi_{t-1}]$  вычисляются следующим образом:

$$\mathbb{E}[z_t | \Phi_{t-1}] = \mu_{0,t} \mathbb{P}(s_t = 0 | \Phi_{t-1}) + \mu_{1,t} \mathbb{P}(s_t = 1 | \Phi_{t-1}), \\ \mathbb{E}[z_t^2 | \Phi_{t-1}] = (\mu_{0,t}^2 + h_{0,t}) \mathbb{P}(s_t = 0 | \Phi_{t-1}) + (\mu_{1,t}^2 + h_{1,t}) \mathbb{P}(s_t = 1 | \Phi_{t-1}).$$

При такой спецификации ни  $h_t$ , ни  $v_t$  не зависят от пути.

Пусть переменная состояния может принимать  $k > 2$  значений. Обозначим за  $M_t$  вектор,  $i$ -ая компонента которого  $\mu_{i,t}$ , за  $H_t$  вектор,  $i$ -ая компонента которого  $h_{i,t}$ , и за  $\Xi_{t|t-1}$  вектор,  $i$ -ая компонента которого равна вероятности предсказания  $\mathbb{P}(s_t = i | \Phi_{t-1})$ . Как и в модели с двумя состояниями, условные средние и условные дисперсии в разных состояниях можно скомбинировать следующим образом:

$$\begin{aligned} h_t &= (M_t \odot M_t + H_t)' \Xi_{t|t-1} - (M_t' \Xi_{t|t-1})^2, \\ v_t &= z_t - M_t' \Xi_{t|t-1}, \end{aligned}$$

где символ  $\odot$  обозначает поэлементное произведение.

По сравнению с моделями Cai (1994) и Hamilton & Susmel (1994), GARCH-модель с переключениями работы Gray (1996) позволяет сдвигаться всем GARCH-параметрам и не накладывает на них никаких ограничений. Поэтому модель Грея намного более гибкая, чем модель Каи и SWARCH. Модель Грея можно оценить с помощью метода, изложенного в разделе 3; см. Gray (1996) и Lin, Hung & Kuan (2002). Заметим, что на практике вместо предположения об условной нормальности можно постулировать  $\varepsilon_t \sim iid$  с распределением  $t(n)$ , где  $n$  — количество степеней свободы. Такая спецификация позволяет моделировать менее гладкое поведение условной дисперсии.

## 9 Эмпирика: исследование тайваньских краткосрочных процентных ставок

В настоящем разделе мы исследуем поведение краткосрочных процентных ставок в Тайване. Хорошо известно, что тайваньские краткосрочные процентные ставки находятся под тщательным присмотром и контролем Центрального банка. Вообще говоря, Центральный банк позволяет ставкам свободно колебаться в определённом диапазоне. Когда ставки резко растут в ответ на сильный политический или экономический шок, Центральный банк обычно прибегает к интервенциям, чтобы восстановить стабильность ставок. Учитывая это, разумно предполагать, что тайваньские процентные ставки могут по-разному вести себя в разные периоды времени. Это наблюдение мотивирует применение модели Gray (1996).

Обозначим процентную ставку за  $r_t$ . Основной моделью для  $\Delta r_t$  является

$$\Delta r_t = \alpha_0 + \beta_0 r_{t-1} + v_t, \quad (22)$$

где  $v_t$  обычно моделируется GARCH(1,1)-процессом:  $v_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$  с

$$h_t = c_0 + a_0 v_{t-1}^2 + b_0 h_{t-1}; \quad (23)$$

см., например, Chan, Karolyi, Longstaff & Sanders (1992). Обозначим за  $\mu$  долгосрочный уровень  $r_t$ ,  $\alpha_0 = \rho \mu$  и  $\beta_0 = -\rho$ . Тогда уравнение (22) можно переписать как

$$\Delta r_t = \rho(\mu - r_{t-1}) + v_t.$$

Если  $\rho > 0$  (т.е.  $\beta_0 < 0$ ), то  $\Delta r_t$  положительна (отрицательна) при  $r_{t-1}$  меньшем (большем), чем долгосрочный уровень. В этом случае  $r_t$  будет корректироваться по направлению к долгосрочному уровню, т.е. характеризоваться возвращением к среднему. Оценивание (22) позволяет исследовать свойство возвращения к среднему с помощью знака коэффициента  $\beta_0$ . Отношение оценок  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  тогда является оценкой долгосрочного уровня  $\mu$ . Постулированная GARCH-модель (23) используется, как обычно, для характеристики волатильности  $\Delta r_t$ .

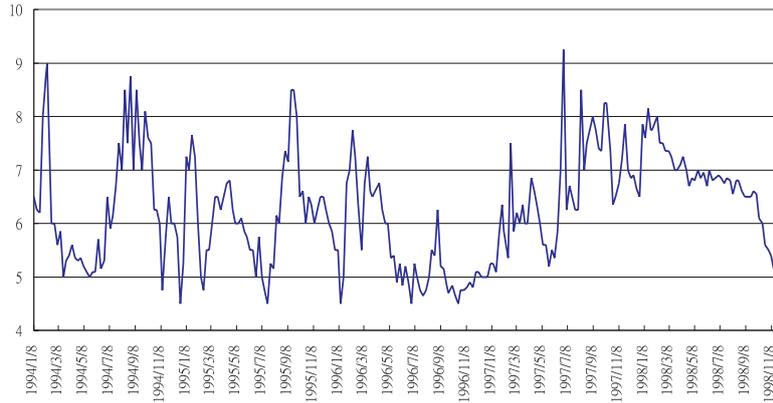


Рис. 6: Недельные процентные ставки  $r_t$ : январь 1994 г. — декабрь 1998 г.

Для включения возможности переключения режимов мы следуем работе Gray (1996) и специфицируем

$$\Delta r_t = \alpha_i + \beta_i r_{t-1} + v_{i,t}, \quad i = 0, 1, \quad (24)$$

и  $v_{i,t} = \sqrt{h_{i,t}} \varepsilon_t$ , где

$$h_{i,t} = c_i + a_i v_{i,t-1}^2 + b_i h_{t-1}, \quad i = 0, 1. \quad (25)$$

Gray (1996) также включает дополнительный член  $\omega_i r_{t-1}^{\tau_i}$  в уравнение (25), чтобы отразить эффект уровня. Мы, однако, не рассматриваем эту возможность в рамках настоящего эссе.

Мы исследуем рыночные ставки 30-дневных коммерческих бумаг на денежном рынке. Мы выбрали эти данные, так как коммерческие бумаги активно торгуются и адекватно отражают краткосрочные процентные ставки. Средние недельные процентные ставки вычисляются из дневных данных базы TEJ (Тайваньского экономического журнала, Taiwan Economic Journal). Всего имеется 258 наблюдений с 04.01.1994 до 07.12.1998. За этот период времени Тайвань пережил несколько значительных шоков; исчерпывающий список этих событий можно найти в работе Lin, Hung & Kuan (2002). Наше исследование позволяет оценить реакцию рынка на различные шоки. Мы строим графики  $r_t$  и  $\Delta r_t$  на Рис. 6 и Рис. 7 соответственно. Приведём некоторые описательные статистики  $\Delta r_t$ : выборочное среднее  $-0,0055\%$ , стандартное отклонение  $0,441$ , коэффициент асимметрии  $-0,8951$ , и куртозис  $4,2229$ . Выборочный коэффициент корреляции  $\Delta r_t$  и  $r_{t-1}$  равен  $-0,3087$ , что свидетельствует в пользу возвращения к среднему для  $r_t$ .

Мы рассматриваем три случая: (i) модель (22) со стандартными GARCH(1,1)-ошибками (23); (ii) модель (22) с переключающимися GARCH(1,1)-ошибками (25); (iii) модель переключающегося среднего (24) с переключающимися GARCH(1,1)-ошибками (25). Все модели оцениваются в предположении  $\varepsilon_t \sim iid \mathcal{N}(0, 1)$ . Так как для случая (ii) мы получили множество незначимых оценок, мы приводим только оценки для специального случая (25):

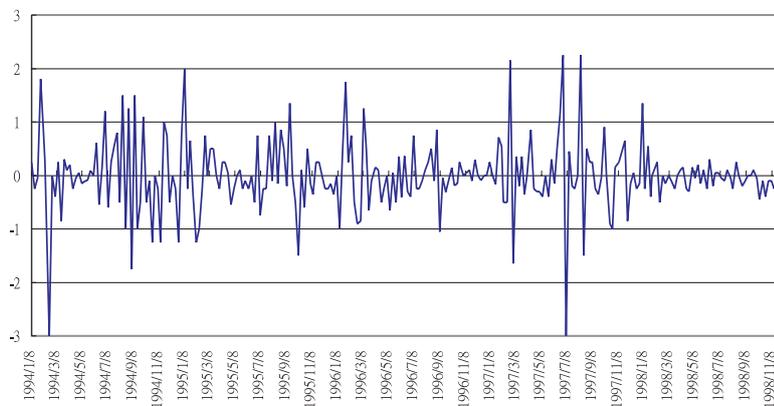
$$\begin{aligned} h_{0,t} &= c_0 + a_0 v_{t-1}^2 + b_0 h_{t-1}, \\ h_{1,t} &= b_1 h_{t-1}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, мы приводим только результаты для случая (iii) следующего вида:

$$\begin{aligned} h_{0,t} &= c_0 + a_0 v_{t-1}^2, \\ h_{1,t} &= c_1 + b_1 h_{t-1}. \end{aligned}$$

Таблица 3: Результаты оценивания двумерной модели с марковскими переключениями для роста ВВП и занятости

Модель	Нет переключений среднего и дисперсии		Нет переключения среднего. Переключение дисперсии		Переключения среднего и дисперсии	
	Оценка	$t$ -статистика	Оценка	$t$ -статистика	Оценка	$t$ -статистика
$\alpha_0$	0,5737	3,42	0,3989	3,09	2,3356	4,05
$\alpha_1$	—	—	—	—	0,2566	1,81
$\beta_0$	-0,0923	-3,46	-0,0721	-3,49	-0,3505	-4,13
$\beta_1$	—	—	—	—	-0,0507	-2,25
$c_0$	0,0155	1,70	0,5450	2,11	0,6699	3,57
$c_1$	—	—	—	—	0,0056	0,41
$a_0$	0,3540	4,60	0,1143	1,17	0,0820	0,54
$a_1$	—	—	—	—	—	—
$b_0$	0,6756	13,57	0,3821	0,80	—	—
$b_1$	—	—	0,2363	2,73	0,2175	2,99
$p_{00}$	—	—	0,8660	13,26	0,8891	19,38
$p_{11}$	—	—	0,8827	20,73	0,9052	27,50
AIC	442,45		394,73		382,25	
SIC	460,22		422,15		417,78	

Рис. 7: Первые разности процентных ставок  $\Delta r_t$ : январь 1994 г. — декабрь 1998 г.

В таблице 3 представлены результаты оценивания из работы Lin, Hung & Kuan (2002). Сглаживающие вероятности события  $s_t = 0$  и оценённые условные дисперсии для случая (iii) построены на Рис. 8 и Рис. 9 соответственно.

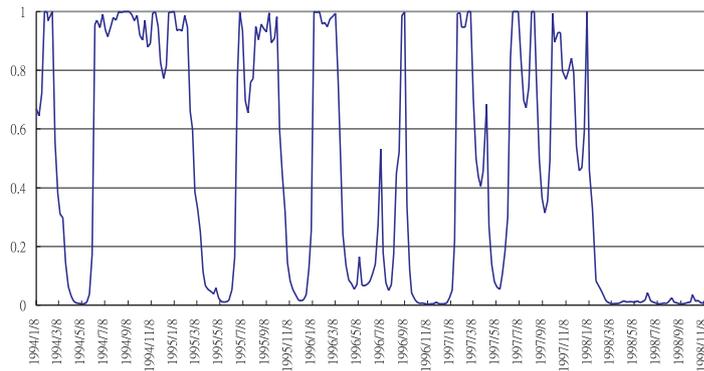
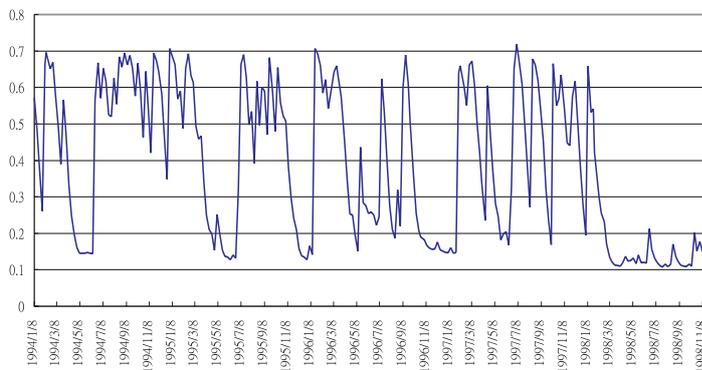
Из таблицы 3 можно видеть, что как AIC, так и SIC увеличиваются для моделей с переключением режимов. Для случая (iii) статистика работы Hansen (1992, 1996a) равна 3,257, т.е. гипотеза об отсутствии переключения отвергается на 1%-ом уровне значимости. Для случаев (ii) и (iii) обе переходные вероятности сильно значимы. Вальдовские статистики теста на независимость состояний равны 59,53 для случая (ii) и 140,39 для случая (iii), т.е. значимы на любом уровне значимости. Эти результаты свидетельствуют в пользу модели с марковскими переключениями. Можно сделать также следующие наблюдения.

1. Все модели приводят к отрицательным оценкам  $\beta$  и значит характеризуются возвращением к среднему. Для случая (iii) величина оценки  $\beta_0$  намного больше, чем  $\beta_1$ , что свидетельствует о большей скорости коррекции в состоянии 0. Когда переключений в среднем не происходит, как в случае (i) и (ii), величина оценённой  $\beta$  мала и близка к  $\beta_1$  из случая (iii).
2. Для случая (iii) оценённые долгосрочные уровни в состояниях 0 и 1 равны 6,6% и 5% соответственно, тогда как они принимают значения 6,2% для случая (i) и 5,53% для случая (ii).
3. Мы видим, что волатильность IGARCH персистентна для случая (i), но не для моделей (ii) и (iii), когда условная дисперсия может переключаться. Это наблюдение аналогично в работе Gray (1996). Также GARCH-параметры в различных режимах не кажутся пропорциональными, что противоречит предположениям Hamilton & Susmel (1994).
4. Результаты оценивания модели (iii) показывают, что  $h_{0,t}$  приблизительно постоянно (т.е. возможна условная гомоскедастичность) и  $h_{1,t}$  преимущественно определяются величинами  $h_{t-1}$  (т.е. возможно наличие только GARCH-эффекта). Такой паттерн волатильности довольно сильно отличается от закономерностей в работе Gray (1996).

Учитывая результаты оценивания модели (iii), состояние 0 можно интерпретировать как режим большого долгосрочного уровня с высокой скоростью коррекции и высоким уровне непersistентной волатильности. Напротив, состояние 1 характеризуется низким долгосрочным уровнем с очень медленной коррекцией и низким уровнем волатильности с быстро убывающим GARCH-эффектом. Одно из возможных объяснений этого результата в том, что когда краткосрочные ставки находятся в режиме высокого долгосрочного уровня, интервенции Центрального банка успешно подавляют их волатильность, так что не наблюдается ни ARCH-, ни GARCH-эффектов. Без интервенций в другом режиме процентные ставки характеризуются GARCH-эффектом, хотя кластеризация волатильности может длиться только очень непродолжительный период времени.

## 10 Заключительные замечания

В настоящем эссе рассмотрены модели с марковскими переключениями для условного среднего и условной дисперсии. Хотя эти модели уже хорошо известны в научной литературе, их исследование очень перспективно. Помимо эмпирических приложений этих моделей, есть пространство для получения теоретических результатов. В разделе 4.1 и приложения В можно видеть, что тест Хансена не вполне удовлетворителен в силу своей консервативности и вычислительной сложности. Необходим более простой и точный тест для моделей с марковскими переключениями. Если он будет получен, такой тест можно будет применять для других моделей с неидентифицируемыми мешающими параметрами. Вывод такого теста

Рис. 8: Оценённые сглаживающие вероятности состояния  $s_t = 0$ .Рис. 9: Оценённые условные дисперсии  $h_t$ .

безусловно станет важным вкладом в эконометрическую науку. Более того, определяющей чертой моделей с марковскими переключениями является собственно механизм марковско-го переключения. Этот механизм можно использовать в других моделях и приложениях. Работа в этом направлении может привести к интересным и полезным результатам.

## Приложение А: оценивание модели

В настоящем приложении мы рассматриваем QML-оценивание модели (5). Пусть  $\tilde{z}_t = z_t - \alpha_0 - \alpha_1 s_t$ . Тогда модель (5) переписется в виде

$$\tilde{z}_t = \beta_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \beta_k \tilde{z}_{t-k} + \varepsilon_t.$$

Определим сначала новую переменную состояния  $s_t^* = 1, 2, \dots, 2^{k+1}$  так, что каждое из этих значений соответствует конкретной реализации  $(s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-k})$ . Например, при  $k = 2$

$$\begin{aligned} s_t^* &= 1 \text{ если } s_t = s_{t-1} = s_{t-2} = 0, \\ s_t^* &= 2 \text{ если } s_t = 0, s_{t-1} = 0 \text{ и } s_{t-2} = 1, \\ s_t^* &= 3 \text{ если } s_t = 0, s_{t-1} = 1 \text{ и } s_{t-2} = 0, \\ &\vdots \\ s_t^* &= 8 \text{ если } s_t = s_{t-1} = s_{t-2} = 1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что  $s_t^*$  является марковской цепью первого порядка. Мы можем расположить значения  $s_t^*$  так, чтобы матрица перехода  $\mathbf{P}$  имела вид

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{10} \\ \mathbf{P}_{01} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{P}_{ji}$  ( $j, i = 0, 1$ ) — блочно-диагональные матрицы размера  $2^{k-1} \times 2^k$ :

$$\mathbf{P}_{ji} = \begin{pmatrix} p_{ji} & p_{ji} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{ji} & p_{ji} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{ji} & p_{ji} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\boldsymbol{\xi}_{t,i} = (\tilde{z}_t, \dots, \tilde{z}_{t-k})'$ , где значения  $\tilde{z}_t, \dots, \tilde{z}_{t-k}$  зависят от реализации  $(s_t, \dots, s_{t-k})$ , и эта реализация такова, что  $s_t^* = i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2^{k+1}$ . Для  $\mathbf{b} = (1, -\beta_1, \dots, -\beta_k)'$  имеем

$$\mathbf{b}'\boldsymbol{\xi}_{t,i} = \tilde{z}_t - \beta_1\tilde{z}_{t-1} - \cdots - \beta_k\tilde{z}_{t-k}.$$

При  $k = 2$  и  $i = 3$ , например, реализация  $(s_t, s_{t-1}, s_{t-2}) = (0, 1, 0)$ , поэтому

$$\mathbf{b}'\boldsymbol{\xi}_{t,i} = (z_t - \alpha_0) - \beta_1(z_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1) - \beta_2(z_{t-2} - \alpha_0).$$

В предположении о нормальности плотность  $z_t$  условно на  $s_t^* = i$  и  $\mathcal{Z}^{t-1}$  равна

$$f(z_t | s_t^* = i, \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{b}'\boldsymbol{\xi}_{t,i})^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right\}, \quad (26)$$

где  $i = 1, 2, \dots, 2^{k+1}$  и  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_k, \sigma_\varepsilon, p_{00}, p_{11})'$ .

Нижеприведённые выкладки аналогичны рассуждениям в разделе 3.1. При известных  $\mathbb{P}(s_t^* = i | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta})$  плотность  $z_t$  условно на  $\mathcal{Z}^{t-1}$  может быть записана с учётом (26) как

$$f(z_t | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \mathbb{P}(s_t^* = i | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) f(z_t | s_t^* = i, \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}). \quad (27)$$

Чтобы вычислить вероятности фильтрации  $\mathbb{P}(s_t^* = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta})$ , заметим, что

$$\mathbb{P}(s_t^* = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbb{P}(s_t^* = i | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta}) f(z_t | s_t^* = i, \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{f(z_t | \mathcal{Z}^{t-1}; \boldsymbol{\theta})}, \quad (28)$$

а  $(j, i)$ -ый элемент матрицы  $\mathbf{P}^*$  равен

$$p_{ji}^* = \mathbb{P}(s_t^* = i | s_{t-1}^* = j) = \mathbb{P}(s_t^* = i | s_{t-1}^* = j, \mathcal{Z}^t)$$

в силу марковского свойства. Следовательно,

$$\mathbb{P}(s_{t+1}^* = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{2^{k+1}} p_{ji}^* \mathbb{P}(s_t^* = j | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}). \quad (29)$$

Таким образом, мы можем проитерировать уравнения (26)–(29) с начальными значениями  $\mathbb{P}(s_k^* = i | \mathcal{Z}^{k-1}; \boldsymbol{\theta})$  для получения  $\mathbb{P}(s_t^* = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta})$  для  $t = k + 1, \dots, T$ . Логарифмическую

функцию квазиправдоподобия можно построить с учётом (27), откуда находится QMLE-оценка.

Далее, для любого  $t$  вероятность фильтрации  $s_t$  равна

$$\mathbb{P}(s_t = 1 | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}) = \sum \mathbb{P}(s_t^* = i | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}),$$

где суммирование ведётся по индексам  $i$ , соответствующим состоянию  $s_t = 1$ , и

$$\mathbb{P}(s_t = 0 | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}) = 1 - \mathbb{P}(s_t = 1 | \mathcal{Z}^t; \boldsymbol{\theta}).$$

Начальные значения  $\mathbb{P}(s_k^* = i | \mathcal{Z}^{k-1}; \boldsymbol{\theta})$  мы можем положить равными их предельным безусловным аналогам:  $(2^{k+1} + 1)$ -ый столбец матрицы  $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$ , где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{P}^* \\ \mathbf{1}' \end{pmatrix},$$

с единичной матрицей  $\mathbf{I}$  и столбцом  $\mathbf{1}$  из  $2^{k+1}$  единиц.

## Приложение В: вычисление статистики Хансена (15)

В данном приложении мы обсуждаем некоторые вычислительные проблемы при подсчёте статистики Хансена (15). Чтобы вычислить концентрированную QMLE-оценку, необходимо максимизировать концентрированную логарифмическую функцию квазиправдоподобия для каждого значения  $\boldsymbol{\gamma}$ . Заметим, что  $p_{00}$  и  $p_{11}$  в векторе  $\boldsymbol{\gamma}$  могут принимать любые значения из отрезка  $[0, 1]$ , и значит  $\alpha_1$  может быть любым действительным числом. На практике рассматривается только конечный набор значений для  $\boldsymbol{\gamma}$ . В пространстве параметров формируется сетка значений, и концентрированная QMLE-оценка вычисляется только на этой сетке. Например, Hansen (1992) ограничивает значения  $\alpha_1$  интервалом  $[0, 2]$  и формирует сетку из 20 точек:  $0,1; 0,2; \dots; 2$ , а его Сетка 3 для  $p_{00}$  (и  $p_{11}$ ) содержит 8 точек:  $0,12; 0,23; \dots; 0,89$ . Всего получается  $1280 (= 8 \cdot 8 \cdot 20)$  точек для  $\boldsymbol{\gamma}$ , так что необходимо будет провести 1280 процедур оптимизации. Это очень затратно с вычислительной точки зрения; более мелкая сетка, конечно, потребует ещё более интенсивных вычислений.

Hansen (1992, 1996a) предлагает использовать симуляции для распределения  $\sup_{\boldsymbol{\gamma}} Q^*(\boldsymbol{\gamma})$ , где  $Q^*(\boldsymbol{\gamma})$  — гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной матрицей  $K^*(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)$ . Обозначим за  $\hat{K}(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)$  состоятельную оценку  $K^*(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)$ ; точные выражения для  $\hat{K}$  можно найти в работе Hansen (1996a). Теперь можно последовательно генерировать гауссовские процессы с ковариационными функциями  $\hat{K}(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)$ . Так как гауссовские процессы полностью определяются ковариационной функцией, точная верхняя грань каждого сгенерированного процесса имеет приблизительно такое же распределение, как  $\sup_{\boldsymbol{\gamma}} Q^*(\boldsymbol{\gamma})$ . Эти значения точных верхних граней совместно формирует симулированное распределение  $\sup_{\boldsymbol{\gamma}} Q^*(\boldsymbol{\gamma})$ , откуда можно получить критические и  $p$ -значения статистики Хансена. Следуя этой логике, Hansen (1996a) предлагает сгенерировать выборку из  $iid \mathcal{N}(0, 1)$ -случайных величин  $\{u_1, \dots, u_{T+M}\}$  и вычислить

$$\frac{\sum_{j=0}^M \sum_{t=1}^T q_t \left( \boldsymbol{\gamma}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\gamma}) \right) u_{t+k}}{\sqrt{1 + M\hat{V}_T(\boldsymbol{\gamma})}},$$

где  $\boldsymbol{\gamma}$  принимает значения на сетке (обсуждено в предыдущем параграфе), а  $q_t$  — слагаемые  $Q_T(\boldsymbol{\gamma})$ . Тогда условно на данных, по которым оценивается модель, сгенерированный таким образом процесс имеет нулевое среднее и точную ковариационную функцию  $\hat{K}^*(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)$ . А это в точности нужный нам процесс.

## Список литературы

- Albert, J. & S. Chib (1993). Bayesian inference via Gibbs sampling of autoregressive time series subject to Markov mean and variance shifts. *Journal of Business & Economic Statistics* 11, 1–15.
- Andrews, D.W.K. (1991). An empirical process central limit theorem for dependent non-identically distributed random variables. *Journal of Multivariate Analysis* 38, 187–203.
- Andrews, D.W.K. (1993). Tests for parameter instability and structural change with unknown change points. *Econometrica* 61, 821–856.
- Bai, J. (1999). Likelihood ratio tests for multiple structural changes. *Journal of Econometrics* 91, 299–323.
- Bai, J. & P. Perron (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica* 66, 47–78.
- Blanchard, O.J. & D. Quah (1989). The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbance. *American Economic Review* 79, 655–673.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307–327.
- Cai, J. (1994). A Markov model of switching-regime ARCH, *Journal of Business & Economic Statistics* 12, 309–316.
- Casella, G. & E. George (1992). Explaining the Gibbs sample. *American Statistician* 46, 167–174.
- Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff & A.B. Sanders (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance* 47, 1209–1227.
- Chen, S.-W. & J.-L. Lin (1999). Switching ARCH models of stock market volatility in Taiwan. *Advances in Pacific Basin Business, Economics, and Finance* 4, 1–21.
- Chen, S.-W. & J.-L. Lin (2000a). Modeling business cycles in Taiwan with time-varying Markov-switching models. *Academia Economic Papers* 28, 17–42.
- Chen, S.-W. & J.-L. Lin (2000b). Identifying turning points and business cycles in Taiwan: A multivariate dynamic Markov-switching factor model approach. *Academia Economic Papers* 28, 289–320.
- Chib, S. & E. Greenberg (1996). Markov chain Monte Carlo simulation methods in econometrics. *Econometric Theory* 12, 409–431.
- Davies, R.B. (1977). Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika* 64, 247–254.
- Davies, R.B. (1987). Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika* 74, 33–43.
- Diebold, F.X., J.-H. Lee & G.C. Weinbach (1994). Regime switching with time-varying transition probabilities. Глава в *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration*, под редакцией С. Hargreaves, стр. 283–302. Oxford: Oxford University Press.
- Diebold, F.X. & G.D. Rudebusch (1996). Measuring business cycles: A modern perspective. *Review of Economics and Statistics* 78, 67–77.
- Dueker, M.J. (1997). Markov switching in GARCH processes and mean-reverting stock market volatility. *Journal of Business & Economic Statistics* 15, 26–34.
- Durland, J.M. & T.H. McCurdy (1994). Duration-dependent transitions in a Markov model of U.S. GNP growth. *Journal of Business & Economic Statistics* 12, 279–288.
- Engel, C. (1994). Can the Markov switching model forecast exchange rates?. *Journal of International Economics* 36, 151–165.
- Engel, C. & J.D. Hamilton (1990). Long swings in the dollar: Are they in the data and do markets know it? *American Economic Review* 80, 689–713.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50, 987–1007.
- Filardo, A.J. (1994). Business-cycle phases and their transitional dynamics. *Journal of Business & Economic Statistics* 12, 299–308.
- Filardo, A.J. & S.F. Gordon (1998). Business cycle durations. *Journal of Econometrics* 85, 99–123.

- Garcia, R. (1998). Asymptotic null distribution of the likelihood ratio test in Markov switching model. *International Economic Review* 39, 763–788.
- Garcia, R. & P. Perron (1996). An analysis of the real interest rate under regime shifts. *Review of Economics and Statistics* 78, 111–125.
- Gelfand, A.E. & A. F. M. Smith (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association* 85, 398–409.
- Ghysels, E. (1994). On the periodic structure of the business cycle. *Journal of Business & Economic Statistics* 12, 289–298.
- Goldfeld, S.M. & R.E. Quandt (1973). A Markov model for switching regressions. *Journal of Econometrics* 1, 3–16.
- Goodwin, T.H. (1993). Business-cycle analysis with a Markov switching model. *Journal of Business & Economic Statistics* 11, 331–339.
- Granger, C.W.J. & T. Teräsvirta (1993). *Modelling Nonlinear Economic Relationships*. New York: Oxford University Press.
- Gray, S.F. (1996). Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process. *Journal of Financial Economics* 42, 27–62.
- Hamilton, J.D. (1988). Rational-expectations econometric analysis of changes in regimes: An investigation of the term structure of interest rates. *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, 385–423.
- Hamilton, J.D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica* 57, 357–384.
- Hamilton, J.D. (1990). Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of Econometrics* 45, 39–70.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- Hamilton, J.D. (1996). Specification testing in Markov-switching time series models. *Journal of Econometrics* 70, 127–157.
- Hamilton, J.D. & G. Lin (1996). Stock market volatility and the business cycle. *Journal of Applied Econometrics* 11, 573–593.
- Hamilton, J.D. & R. Susmel (1994). Autoregressive conditional heteroscedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics* 64, 307–333.
- Hansen, B.E. (1992). The likelihood ratio test under nonstandard conditions: testing the Markov switching model of GNP. *Journal of Applied Econometrics* 7, S61–S82.
- Hansen, B.E. (1996a). Erratum: The likelihood ratio test under nonstandard conditions: testing the Markov switching model of GNP. *Journal of Applied Econometrics* 11, 195–198.
- Hansen, B.E. (1996b). Inference when a nuisance parameter is not identified under the null hypothesis. *Econometrica* 64, 413–430.
- Harvey, A.C., E. Ruiz & N. Shephard (1994). Multivariate stochastic variance models. *Review of Economic Studies* 61, 247–264.
- Hsu, S.-H. & C.-M. Kuan (2001). Identifying Taiwan's business cycles in 1990s: An application of the bivariate Markov switching model and Gibbs sampling (in Chinese). *Journal of Social Sciences and Philosophy* 13, 515–540.
- Huang, C.H. (1999). Phases and characteristics of Taiwan business cycles: A Markov switching analysis. *Taiwan Economic Review* 27, 185–214.
- Huang, Y.-L., C.-M. Kuan & K. S. Lin (1998). Identifying the turning points of business cycles and forecasting real GNP growth rates in Taiwan (in Chinese). *Taiwan Economic Review* 26, 431–457.
- Jacquier, E., N.G. Polson & P. Rossi (1994). Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion). *Journal of Business & Economic Statistics* 12, 371–417.
- Kim, C.J. (1994). Dynamic linear models with Markov-switching. *Journal of Econometrics* 60, 1–22.
- Kim, C.J. & C.R. Nelson (1998). Business cycle turning points, a new coincident index, and tests of duration dependence based on a dynamic factor model with regime switching. *Review of Economics and Statistics* 80, 188–201.
- Kim, C.J. & C.R. Nelson (1999). *State Space Models with Regime Switching, Classical and Gibbs Sampling Approaches with Applications*. Cambridge: MIT Press.

- Kim, M.-J. & J.-S. Yoo (1995). New index of coincident indicators: A multivariate Markov switching factor model approach. *Journal of Monetary Economics* 36, 607–630.
- Kuan, C.-M. & H. White (1994). Artificial neural networks: An econometric perspective (with reply). *Econometric Reviews* 13, 1–91 & 139–143.
- Lam, P.S. (1990). The Hamilton model with a general autoregressive component. *Journal of Monetary Economics* 26, 409–432.
- Lamoureux, C.G. & W.D. Lastrapes (1990). Persistence in variance, structural change and the GARCH model. *Journal of Business & Economic Statistics* 8, 225–234.
- Lin, C.-C., M.-W. Hung & C.-M. Kuan (2002). The dynamic behavior of short term interest rates in Taiwan: An application of the regime switching model (in Chinese). *Academia Economic Papers* 30, 29–55.
- Lucas, R.E. (1977). *Understanding business cycles* in K. Brunner & A. Metzler (eds.), *Stabilization of the Domestic and International Economy*, 7–29, Carnegie–Rochester series on Public Policy 5.
- McCulloch, R.E. & R.S. Tsay (1994). Statistical analysis of economic time series via Markov switching models. *Journal of Time Series Analysis* 15, 523–539.
- Melino, A. & S.M. Turnbull (1990). Pricing foreign currency options with stochastic volatility. *Journal of Econometrics* 45, 239–265.
- Quandt, R.E. (1972). A new approach to estimating switching regressions. *Journal of the American Statistical Association* 67, 306–310.
- Ramchand, L. & R. Susmel (1998). Volatility and cross correlation across major stock markets. *Journal of Empirical Finance* 5, 397–416.
- Rau, H.-H., H.-W. Lin & M.-Y. Li (2001). *Examining Taiwan's business cycle via two-period MS Models* (in Chinese). *Academia Economic Papers* 29, 297–319.
- Schaller, H. & S. van Norden (1997). Regime switching in stock market returns. *Applied Financial Economics* 7, 177–191.
- So, M.K.P., K. Lam & W.K. Li (1998). A stochastic volatility model with Markov switching. *Journal of Business & Economic Statistics* 16, 244–253.
- Sola, M. & J. Driffill (1994). Testing the term structure of interest rates using a stationary vector autoregression with regime switching. *Journal of Economic Dynamics and Control* 18, 601–628.
- Tanner, M. & W.H. Wong (1987). The calculation of posterior distributions by data augmentation. *Journal of the American Statistical Association* 82, 528–550.
- Tong, H. (1990). *Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach*. New York: Oxford University Press.

## Markov switching model

Chung-Ming Kuan

*Academia Sinica, Taipei, Taiwan*

We discuss the Markov switching model, one of most popular nonlinear time series models. This model involves switching between multiple structures that characterize different time series behaviors in different regimes, the switching mechanism being controlled by an unobservable variable that follows a Markov chain process. We introduce a simple Markov switching model of conditional mean and describe its generalizations, study estimation methods, discuss how to conduct hypothesis testing, and elaborate on two empirical examples.

