

# Статьи: пространственная эконометрика ВРП и загрязнение окружающей среды в регионах России: пространственно-эконометрический анализ\*

Вера Иванова<sup>†</sup>

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Санкт-Петербург, Россия*

В работе проводится эмпирическая оценка зависимости уровня загрязнения окружающей среды от уровня дохода на душу населения в российских регионах с учетом особенностей взаимного пространственного расположения территорий. Показано, что региональный индикатор загрязнения окружающей среды является пространственно автокоррелированным. Гипотеза о том, что среднедушевые региональные выбросы в окружающую среду имеют вид перевернутой U-образной зависимости от среднедушевого ВРП, подтвердилась. Полученные значения поворотной точки дохода показывают, что положение большинства российских регионов соответствует возрастающей части экологической кривой Кузнецца, т.е. для существенной части российских регионов характерно увеличение уровня загрязнения окружающей среды при росте доходов.

*Ключевые слова: экологическая кривая Кузнецца, пространственная эконометрика, индекс Морана, российские регионы*

*Классификация JEL: C23, O13, O44, Q53*

## 1 Введение

Интерес к проблеме качества окружающей среды трудно переоценить. Несмотря на то, что Россия присоединилась к Рамочной конвенции ООН об изменении климата, обязывающей развитые страны и страны с переходной экономикой сократить или стабилизировать выбросы парниковых газов, она продолжает оставаться одним из мировых лидеров по количеству выбросов отдельных видов загрязняющих веществ в окружающую среду. Согласно данным Всемирного Банка, Российская Федерация занимает второе место по выбросам CO<sub>2</sub> в пересчете на душу населения после США, опережая Китай, Евросоюз и Индию.<sup>1</sup>

В статье исследуется взаимосвязь между уровнем загрязнения окружающей среды и среднедушевым доходом, известная как гипотеза об экологической кривой Кузнецца, в российских регионах с учетом их взаимного расположения. В существующих работах, выполненных на российских региональных данных, полностью игнорируется пространственная компонента, а следовательно, не учитывается то, что загрязнение одного региона может негативно сказаться на экологической ситуации близлежащих территорий. Данная статья заполняет соответствующую нишу в эмпирических исследованиях взаимосвязи регионального дохода и уровня деградации окружающей среды в регионах России.

---

\*Цитировать как: Иванова, Вера (2019) «ВРП и загрязнение окружающей среды в регионах России: пространственно-эконометрический анализ», Квантиль, №14, стр. 53–62. Citation: Ivanova, Vera (2019) “GRP and environmental pollution in Russian regions: spatial econometric analysis”, Quantile, No.14, pp. 53–62.

<sup>†</sup>Адрес: 190068, Санкт-Петербург, набережная канала Грибоедова, д. 123, к. 123, Лаборатория теории рынков и пространственной экономики. Электронная почта: [viivanova@hse.ru](mailto:viivanova@hse.ru). Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, финансируемой Проектом повышения конкурентоспособности ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

<sup>1</sup>Источник: Всемирный Банк, режим доступа: <https://data.worldbank.org/indicator/EN.ATM.CO2E.PC>.

Принцип экологической кривой Кузнецца (ЭКК) следующий: до достижения определенного уровня (поворотной точки) дохода регионы демонстрируют увеличение выбросов в окружающую среду с ростом доходов, а после достижения поворотной точки происходит уменьшение объемов выбросов с увеличением дохода. Свое название ЭКК получило благодаря схожести со структурой неравенства доходов, выявленной в работе Kuznets (1955).

Первые эмпирические оценки экологической кривой Кузнецца были получены в работах Grossman & Krueger (1991, 1995) и Selden & Song (1994) на межстрановых выборках с различными типами загрязняющих выбросов. Авторы показали, что уровень загрязнений воздуха и воды увеличивается с ростом национального дохода при низких значениях валового внутреннего продукта, и убывает при высоких значениях ВВП, имея вид перевернутой U-образной зависимости уровня загрязнений от среднедушевого ВВП. В исследовании Shafik & Bandyopadhyay (1992) аналогичная зависимость была найдена для показателей вырубки леса и национального дохода. Возросший с появлением этих работ интерес к экологической кривой Кузнецца подтверждается многочисленными эмпирическими исследованиями, детальные обзоры и критику можно найти, например, в работах Harbaugh, Levinson & Wilson (2002), Millimet, List & Stengos (2003), Stern (2004), в которых, в частности, отмечается чувствительность результатов к выбору индикатора загрязнения и территориальных единиц. Простое теоретическое обоснование ЭКК приведено в работе Andreoni & Levinson (2001).

Эмпирические исследования, проведенные на российских данных, демонстрируют довольно широкий разброс выводов по ЭКК, зависящий от типа выбросов, объясняющих переменных, рассматриваемого временного интервала и исследуемых регионов. В работе Михалищева и Раскиной (2016) протестирована гипотеза об ЭКК на российских региональных данных за 2000–2013 гг. для трех различных видов загрязнителей ( $\text{CO}$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{NO}_2$ ) с использованием полной модели с широким перечнем объясняющих переменных и короткой модели, в которой опущена часть контрольных переменных. Их результаты подтверждают наличие ЭКК для  $\text{CO}$  выбросов, в то время как для выбросов  $\text{NO}_2$  и  $\text{SO}_2$  выводы по короткой и полной моделям неоднозначны. В статье Rudenko & Skripnuk (2016) фокус исследования настроен на 4 арктических региона России за период 2000–2013 гг., авторы отмечают, что исследуемые территории демонстрируют увеличение загрязнения окружающей среды с ростом доходов. Результаты Vornovyt'skyu & Boyce (2010), полученные для 2000, 2004 и 2005 гг. для неконтролируемых региональных выбросов, показывают возрастание уровня загрязнений от региональных доходов.

Также существуют эмпирические исследования на агрегированных российских данных, оценивающие ЭКК и ее поворотную точку во времени. В работе Yang, Lou, Sun, Wang & Wang (2017) тестируется наличие ЭКК за период 1998–2013 гг., в качестве исследуемого загрязнителя используются оцененные значения объемов выброса парниковых газов. Авторы, основываясь на подтверждении перевернутой U-образной зависимости загрязняющих веществ от времени, предсказывают, что при условии сохранения Россией устойчивых темпов роста поворотная точка будет достигнута через 10 лет, после чего начнется снижение выбросов парниковых газов. В статье Ketenci (2018) моделируется эмпирическая зависимость объема выбросов  $\text{CO}_2$  от реальных доходов, энергопотребления, уровня образования, международной торговли, уровня урбанизации для периода с 1991 по 2016 гг. Автор выявляет наличие ЭКК для России и приходит к выводу, что экономический рост имеет краткосрочный эффект на выбросы  $\text{CO}_2$ , энергопотребление — как краткосрочный, так и долгосрочный, а уровень урбанизации оказывает долгосрочное воздействие на выбросы  $\text{CO}_2$ .

Таким образом, выводы, полученные в исследованиях ЭКК на российских региональных данных за различные временные периоды, неоднозначны. Необходимо подчеркнуть, что имеющиеся исследования не учитывают возможную пространственную автокорреляцию региональных индикаторов, в частности, показателей загрязнения окружающей среды и региональных доходов. С эконометрической точки зрения, наличие пространственной автокор-

реляции в данных требует специальных методов оценивания моделей, в противном случае полученные эмпирические оценки не заслуживают доверия. Так, в работе Maddison (2006) показано, что среднедушевые выбросы загрязняющих веществ в окружающую среду являются функцией пространственно средневзвешенных значений данного индикатора соседних стран. Maddison (2006) также выявил следующий пространственный эффект: страна, окруженная территориями с высокими доходами населения, демонстрирует более низкий уровень загрязнения окружающей среды. В статье Rupasingha, Goetz, Debertin & Pagoulatos (2004) на примере штатов США также подтверждена значимость пространственной компоненты в эмпирической модели ЭКК и показано различие результатов расчета поворотной точки дохода. В работе Ивановой (2017) продемонстрировано, что уровень загрязнения окружающей среды в российских регионах является пространственно автокоррелированным, и получены эмпирические оценки экологической кривой Кузнеця на кросс-секционных данных 2014 года.

В данной работе будет протестирована ЭКК для российских регионов с учетом их пространственной взаимозависимости, определяемой различными пространственными весами. Исследование охватывает период с 2005-й по 2015-й года и опирается на ежегодные официальные статистические данные по 78 субъектам федерации.

Структура работы следующая. В разделе 2 приведено описание используемых данных и показано, что индикатор уровня выбросов загрязняющих веществ в атмосферу является пространственно автокоррелированным. В разделе 3 оцениваются пространственные регрессионные модели экологической кривой Кузнеця с различными пространственными весами. В разделе 4 приведена интерпретация результатов оценивания. Раздел 5 содержит основные выводы и заключительные замечания.

## 2 Данные

Для проведения данного исследования была подготовлена база данных российских региональных индикаторов, включающая в себя загрязнения окружающей среды от стационарных источников, а также индикаторы регионального дохода в пересчете на душу населения, контрольные переменные, отражающие региональный уровень активности отраслей, оказывающих наибольший ущерб окружающей среде. Единица наблюдения — субъект федерации (регион) России, при этом составные субъекты федерации — Тюменская область и Архангельская область — рассматриваются как единые регионы. Чеченская Республика и Республика Ингушетия исключены из анализа ввиду отсутствия данных по отдельным индикаторам. Таким образом, число регионов составляет 78. База данных имеет панельную структуру с ежегодными данными за 2005–2015 гг., источник данных — Федеральная служба государственной статистики.<sup>2</sup> Также в работе использованы геокодированные наборы (шейп-файлы) российских регионов для учета их пространственной неоднородности и моделирования пространственных взаимосвязей.<sup>3</sup>

Тестирование гипотезы о наличии ЭКК обычно проводят на базе регрессионного уравнения с зависимой переменной, соответствующей уровню загрязнения, и правой частью в виде перевернутой U-образной зависимости от среднедушевого дохода. Следуя Martinez-Zarzoso & Bengochea-Morancho (2004), в качестве базового уравнения будем рассматривать следующую регрессионную модель с индивидуальными эффектами регионов и временным трендом:

$$Y = \alpha + \beta_1 \ln GRP + \beta_2 (\ln GRP)^2 + X' \delta + \gamma t + \varepsilon, \quad (1)$$

где  $Y$  — выбросы загрязняющих веществ в атмосферный воздух от стационарных источников в пересчете на душу населения (кг), логарифм,  $\ln GRP$  — валовый региональный продукт на

<sup>2</sup>Источник: Федеральная служба государственной статистики, режим доступа: <http://www.gks.ru/>

<sup>3</sup>Источник: Свободные данные по границам субъектов РФ, режим доступа: <http://gis-lab.info/qa/rusbounds-rosreestr.html>

душу населения (руб), логарифм,  $\alpha$  — индивидуальные эффекты регионов,  $X'$  — векторы строки объясняющих переменных,  $\delta$  — вектор коэффициентов,  $t$  — временной тренд,  $\varepsilon \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$  и удовлетворяют условиям классической линейной регрессионной модели. Если коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  таковы, что  $\beta_2 < 0$ , а поворотная точка дохода (абсцисса вершины параболы)

$$\tau = \exp\left(-\frac{\beta_1}{2\beta_2}\right) \quad (2)$$

принимает «разумно достижимые» значения, то будем считать, что гипотеза о наличии экологической кривой Кузнецца для российских регионов выполняется.

На Рис. 1 представлено пространственное распределение среднедушевых выбросов загрязняющих веществ в атмосферу, исходящих от стационарных источников, за 2015 г. Визуальный анализ пространственного распределения выбросов по территориям не позволяет считать их случайными. Аналогичную картину можно наблюдать и при построении карт пространственного распределения данного показателя за весь рассматриваемый период: регионы с высоким уровнем выбросов окружены, в основном, регионами также с высокими показателями загрязнения окружающей среды. Данная визуально выявленная закономерность позволяет выдвинуть предположение о ненулевой пространственной автокорреляции уровня загрязнений в российских регионах.

Для количественной оценки тесноты взаимосвязи значений показателя  $x$  для регионов, расположенных географически близко, используется глобальный индекс пространственной автокорреляции Морана  $I$ :

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}}, \quad (3)$$

где  $w_{ij}$  — пространственные веса, являющиеся  $(i, j)$ -ми элементами пространственной матрицы  $W$  размерности  $n \times n$ ,  $x_i$  — значения исследуемого показателя,  $\bar{x}$  — его среднее значение. Пространственные веса  $w_{ij}$  служат в качестве меры локационной схожести регионов  $i$  и  $j$ ,  $i \neq j$ ; чем больше значения  $w_{ij}$ , тем выше схожесть расположения их территорий. При расчете данной пространственной статистики принято считать, что  $w_{ii} = 0$ .

Одна из ключевых проблем пространственного анализа данных — выбор весов, описывающих интенсивность пространственного воздействия индикаторов других регионов на значения индикатора данного региона. В работе Harris, Moffat & Kravtsova (2011) представлен широкий обзор стандартных подходов к построению матрицы пространственных весов. Обычной практикой является использование пространственных весовых матриц, основанных либо на смежности, либо на расстоянии. Расстояния между регионами могут определяться как расстояния между центроидами, или региональными центрами (или крупнейшими городами).

В данной работе рассматриваются три вида пространственных взаимосвязей между регионами: (1) обратные географические расстояния ( $w_{ij} = 1/d$  для регионов  $i$  и  $j$ ,  $i \neq j$ , где  $d$  — географическое расстояние между центроидами регионов,  $w_{ii} = 0$ ); (2) квадраты обратных географических расстояний ( $w_{ij} = 1/d^2$ , для регионов  $i$  и  $j$ ,  $i \neq j$ ,  $w'_{ii} = 0$ ); (3) смежности ( $w_{ij} = 1$  для регионов  $i$  и  $j$ ,  $i \neq j$ , имеющих общую сухопутную границу,<sup>4</sup> для остальных регионов — 0). В литературе строки матрицы пространственных весов стандартизированы,

<sup>4</sup>В случае отсутствия сухопутной границы с другими регионами в качестве «соседа» рассматривался ближайший в смысле географического расстояния субъект федерации.

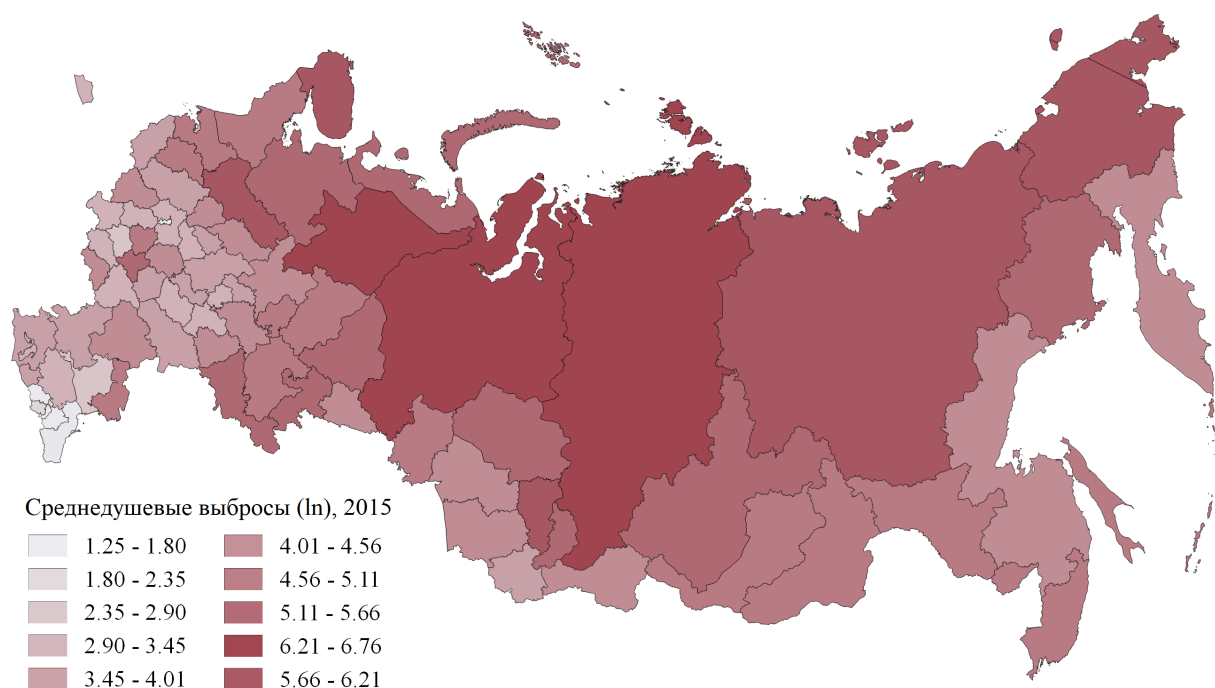


Рис. 1: Выбросы загрязняющих веществ в атмосферный воздух от стационарных источников, в пересчете на душу населения, кг (ln), 2015 г.

их сумма равна 1:  $\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1$  для всех  $i$ , в этом случае элементы строк весовых матриц могут быть проинтерпретированы как доли влияния соседних регионов на рассматриваемый регион. Матрицы пространственных весов, полученные после применения к описанным матрицам операции стандартизации строк, обозначим следующим образом:  $W^{(d)}$  — матрица обратных географических расстояний,  $W^{(d^2)}$  — матрица квадратов обратных географических расстояний,  $W^{(c)}$  — матрица смежности.

Таблица 1: Индексы Морана показателя  $Y_t$

Год $t$	$W^{(d)}$	$W^{(d^2)}$	$W^{(c)}$
2005	0,195	0,377	0,533
2006	0,185	0,366	0,514
2007	0,184	0,364	0,520
2008	0,188	0,371	0,531
2009	0,191	0,376	0,543
2010	0,182	0,357	0,532
2011	0,185	0,374	0,524
2012	0,179	0,357	0,510
2013	0,179	0,365	0,520
2014	0,181	0,372	0,514
2015	0,178	0,352	0,512

Значения индекса Морана для логарифмов среднедушевых выбросов загрязняющих веществ в атмосферу, исходящих от стационарных источников, приведены в таблице 1, все они являются статистически значимыми при уровне значимости 0,05. Это означает, что зависимая переменная в уравнении (1) является пространственно автокоррелированной.

Следовательно, можно считать, что процесс, порождающий данные переменной  $Y$ , является пространственно автокоррелированным. Поэтому в модели (1) ошибки  $\varepsilon$  не удовлетворяют условиям классической линейной регрессионной модели, и стандартные методы оценивания неприменимы.

### 3 Пространственная экологическая кривая Кузнеця

Как было показано выше, среднедушевые региональные загрязнения являются пространственно автокоррелированными, т.е. проявляют взаимосвязь, обусловленную тем, как регионы расположены друг относительно друга. Поэтому дальнейшая эмпирическая стратегия состоит в формулировке соответствующей пространственной модели для ЭКК. Регрессионные модели с наиболее простой структурой, учитывающей пространственно автокоррелированную структуру данных  $Y$ , следующие:

- пространственная авторегрессионная модель (SAR — spatial autoregression), содержащая пространственный лаг зависимой переменной:

$$Y = \alpha + \rho WY + \beta_1 \ln GRP + \beta_2 (\ln GRP)^2 + X'\delta + \gamma t + \varepsilon, \quad (4)$$

- модель с пространственной ошибкой (SEM — spatial error model):

$$Y = \alpha + \beta_1 \ln GRP + \beta_2 (\ln GRP)^2 + X'\delta + \gamma t + \epsilon, \quad \epsilon = \lambda W\epsilon + \varepsilon, \quad (5)$$

где  $W$  — матрица пространственных весов,  $X$  — матрица контрольных переменных,  $\rho$  и  $\lambda$  — пространственные параметры. В качестве контрольных переменных будем использовать следующие:  $\ln Elc$  — потребление электроэнергии в пересчете на душу населения (тыс. кВтч), логарифм,  $Gini$ ,  $Gini^2$  — коэффициент Джини (индекс концентрации доходов) и его квадрат,  $Manf$  — доля обрабатывающих производств в отраслевой структуре валовой добавленной стоимости,  $Ming$  — доля добычи полезных ископаемых в отраслевой структуре валовой добавленной стоимости.<sup>5</sup>

Для того чтобы определить, которая из двух приведенных моделей лучше описывает данные, воспользуемся пространственными тестами множителей Лагранжа (Anselin, Vera, Florax & Yoon 1996). Значения тестовых статистик  $LM$ , рассчитанные для трех различных пространственных матриц  $W^{(d)}$ ,  $W^{(d^2)}$  и  $W^{(c)}$ , а также соответствующие  $p$ -значения приведены в таблице 2.

Таблица 2: Результаты тестов множителей Лагранжа

Тест	$W^{(d)}$		$W^{(d^2)}$		$W^{(c)}$	
	$LM$	$p$	$LM$	$p$	$LM$	$p$
lag	27,257	0,000	33,654	0,000	34,074	0,000
error	10,35	0,001	21,083	0,000	2,161	0,141

<sup>5</sup>Включение данных о структуре ВРП обусловлено тем, что, согласно данным Государственного доклада (2018), обрабатывающая и добывающая отрасли вносят наибольший вклад в общее количество выбросов загрязняющих веществ, поступающих в атмосферу от стационарных источников. Так, в 2005 году вклад предприятий обрабатывающей отрасли составлял 35,5%, вклад добывающей отрасли — 30,1%. В 2015 году эти пропорции изменились в незначительной степени: основные объемы и основная доля рассматриваемых выбросов приходилась на предприятия обрабатывающих производств (34,5% от всех выбросов от стационарных источников), на предприятия по добыче полезных ископаемых — 27,5%.

Из таблицы 2 следует, что для всех трех видов пространственных весов наилучшей регрессионной моделью является SAR модель, содержащая пространственный лаг зависимой переменной. Оценки модели SAR (4), полученные методом максимального правдоподобия, для всех трех пространственных матриц приведены в таблице 3, стандартные ошибки коэффициентов указаны в скобках.<sup>6</sup>

Таблица 3: Оценки модели SAR (4)

Весы →	$W^{(d)}$		$W^{(d^2)}$		$W^{(c)}$	
	(1) коэфф.	(2) ст.ош.	(3) коэфф.	(4) ст.ош.	(5) коэфф.	(6) ст.ош.
Регрессоры						
$\text{spatial } \rho$	0,351***	(0,040)	0,294***	(0,033)	0,201***	(0,027)
$\ln GRP$	4,200***	(0,918)	4,070***	(0,910)	4,270***	(0,920)
$(\ln GRP)^2$	-0,170***	(0,037)	-0,165***	(0,037)	-0,174***	(0,037)
$\ln Elc$	1,215***	(0,055)	1,201***	(0,055)	1,215***	(0,056)
$Gini$	40,465***	(9,360)	41,209***	(9,255)	46,306***	(9,321)
$Gini^2$	-54,760***	(11,476)	-55,860***	(11,342)	-62,025***	(11,420)
$Manf$	0,001	(0,003)	0,002	(0,003)	0,002	(0,003)
$Ming$	0,028***	(0,003)	0,028***	(0,003)	0,028***	(0,003)
$t$	-0,036**	(0,012)	-0,037**	(0,012)	-0,037**	(0,012)
$R^2$	0,752		0,756		0,750	
$\sigma^2$	0,349		0,343		0,351	
log-likelihood	-767,5		-762,5		-772,3	

Замечания: \*\*\*  $p < 0,001$ , \*\*  $p < 0,01$ , \*  $p < 0,05$ . Число регионов 78, число наблюдений 858.

Коэффициенты для разных пространственных матриц различаются незначительно. Параметр пространственной авторегрессии  $\rho$  является статистически значимым и положительным для всех трех видов пространственных весов, что является подтверждением взаимозависимости среднедушевого уровня загрязнений соседних регионов. Коэффициенты при всех переменных (столбцы 1, 3, 5), кроме  $Manf$ , являются статистически значимыми при уровне 0,01. Коэффициент при квадрате среднедушевого дохода является отрицательным, что соответствует предположению о перевернутой U-образной зависимости уровня загрязнений от доходов. Однако для содержательной интерпретации величины коэффициентов потребуется учесть специфику пространственной регрессии.

## 4 Интерпретация результатов

Особенность пространственной модели SAR состоит в том, что правая часть уравнения содержит пространственный лаг зависимой переменной. Следовательно, коэффициенты при объясняющих не могут быть проинтерпретированы напрямую, т.к. не являются предельными эффектами, означающими, на какую величину изменится зависимая переменная наблюдения  $i$  в результате увеличения объясняющей переменной наблюдения  $i$  на 1 единицу при неизменности остальных переменных.

Согласно структуре модели SAR (4), пространственный эффект зависимой переменной может быть описан следующим образом. Изменение объясняющих переменных в регионе  $i$  приведет к *прямому* воздействию на зависимую переменную (уровень выбросов в окружающую среду) в регионе  $i$  и *косвенному* воздействию на зависимую переменную в регионе

<sup>6</sup>Расчеты выполнены в программе R с использованием пакета `spdep` (Millo & Piras, 2012).

$j \neq i$ . (Например, использование усовершенствованных технологий на производстве, повлекшее уменьшение выбросов и повышение качества жизни в одном регионе, может привлечь в этот регион инвестиции и/или квалифицированную рабочую силу из соседних регионов. Соседние регионы, из которых происходит отток рабочей силы и инвестиций, могут отреагировать на данную ситуацию сокращением производства, что может снизить уровень негативного воздействия на окружающую среду). Усредненные суммы таких воздействий для каждой объясняющей переменной называются «усредненным прямым эффектом» (“average direct impact”) и «усредненным косвенным эффектом» (“average indirect impact”) объясняющей переменной (LeSage & Pace 2009).

Прямые и косвенные эффекты объясняющих переменных приведены в таблице 4. Вклад доли добывающих отраслей в структуре ВРП (прямые эффекты *Ming*) устойчив к выбору пространственной матрицы и показывает, что в регионах с высокой ресурсной составляющей уровень выбросов загрязняющих веществ в атмосферу также высокий. Индекс Джини проявляет нелинейную взаимосвязь с уровнем выбросов загрязняющих веществ в окружающую среду: при малых значениях индекса Джини (при низком уровне неравенства распределения доходов населения) наблюдается небольшой уровень загрязнения окружающей среды, затем после достижения определенного уровня неравенства по доходам наблюдается уменьшение негативного воздействия на окружающую среду. Следовательно, уровень выбросов загрязняющих веществ также имеет перевернутую U-образную зависимость от внутрирегиональных различий распределения дохода. Взаимосвязь энергоёмкости и количества выбросов положительная, что соответствует выводам в литературе.

Таблица 4: Прямые и косвенные эффекты переменных модели SAR (4)

Веса → Регрессоры	$W^{(d)}$		$W^{(d^2)}$		$W^{(c)}$	
	прямые	косвенные	прямые	косвенные	прямые	косвенные
$\ln GRP$	4,217	2,258	4,114	1,649	4,310	1,034
$(\ln GRP)^2$	-0,171	-0,091	-0,167	-0,067	-0,175	-0,042
$\ln Elc$	1,220	0,653	1,214	0,487	1,227	0,294
<i>Gini</i>	40,633	21,753	41,657	16,698	46,748	11,215
<i>Gini</i> <sup>2</sup>	-54,987	-29,437	-56,467	-22,635	-62,617	-15,022
<i>Manf</i>	0,001	0,001	0,002	0,001	0,002	0,000
<i>Ming</i>	0,028	0,015	0,028	0,011	0,029	0,007
<i>year</i>	-0,037	-0,020	-0,037	-0,015	-0,038	-0,009
$\tau$	228732		226547		215836	

Итак, результаты оценивания SAR-модели, учитывающей пространственные взаимосвязи регионов, подтвердили наличие перевернутой U-образной зависимости региональных среднелюдских выбросов от среднелюдского ВРП. Рассчитаем поворотную точку дохода, после достижения которой будет наблюдаться снижение количества выбросов. Поскольку  $\beta_1$  и  $\beta_2$  не являются предельными эффектами  $\ln GRPpc$  и  $(\ln GRPpc)^2$ , они не могут быть использованы для расчета значений поворотной точки ЭКК по формуле (2). Для этих целей воспользуемся значениями прямых эффектов  $\ln GRPpc$  и  $(\ln GRPpc)^2$ , расчетные значения поворотной точки дохода  $\tau$  (в рублях) приведены в таблице 4. Лишь 25 регионов из 79 рассматриваемых продемонстрировали среднегодовой ВРП на душу населения, превышающий указанные значения  $\tau$ , за период с 2005 по 2015 гг., большинство из которых имеют высокую долю добывающей отрасли в ВРП. Следовательно, значения  $\tau$ , рассчитанные за данный временной интервал, нельзя рассматривать как разумно достижимые для большинства регионов.

## 5 Заключение

Эмпирический анализ показал наличие перевернутой U-образной зависимости среднедушевых загрязнений, исходящих от стационарных источников, от среднедушевого ВРП в российских регионах за период с 2005 по 2015 г. Однако расчет поворотной точки дохода, по достижению которой уровень загрязнений начинает уменьшаться, показал, что для российских регионов уровень поворотного дохода оказался достаточно высоким, и лишь малая часть регионов демонстрирует снижение загрязняющих веществ в окружающую среду при достижении поворотного значения ВРП на душу населения. Следовательно, выполнение экологической гипотезы Кузнеца для случая российских регионов можно считать условным, т.к. ЭКК поддерживается формальными тестами статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии, но не проходит проверку в смысле разумно низкого, достижимого для существенной части регионов значения среднедушевого ВРП. Следует отметить, что российские регионы с высоким уровнем среднедушевого дохода, следующим экологической гипотезе Кузнеца, как правило, имеют высокую сырьевую базу. Однако, согласно полученным эмпирическим результатам, можно сделать вывод о том, что экономический рост, основанный на высокой ресурсной ренте, может привести к повышению уровня загрязнения окружающей среды в российских регионах.

## Список литературы

- Государственный доклад «О состоянии и об охране окружающей среды Российской Федерации в 2016 году» (2018). Министерство природных ресурсов и экологии Российской Федерации.
- Иванова В. И. (2017). Пространственный анализ загрязнения окружающей среды в регионах Российской Федерации. В книге *Третьи чтения памяти профессора Б.Л.Овсиевича "Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии"*, материалы Всероссийской конференции 7-9 ноября 2017 г. Издательство Нестор-История, 2017, стр. 121–125.
- Михаилищев, С.Г. & Ю.В. Раскина (2016). Экологическая кривая Кузнеца: случай России. *Финансы и бизнес* 1, 17–39.
- Andreoni, J. & A. Levinson (2001). The simple analytics of the environmental Kuznets curve. *Journal of Public Economics* 80(2), 269–286.
- Anselin, L., A.K. Bera, R. Florax & M.J. Yoon (1996). Simple diagnostic tests for spatial dependence. *Regional Science and Urban Economics* 26(1), 77–104.
- Grossman, G.M. & A.B. Krueger (1991). Environmental impacts of a North American free trade agreement. National Bureau of Economic Research, рабочая статья №. w3914.
- Grossman, G.M. & A.B. Krueger (1995). Economic growth and the environment. *Quarterly Journal of Economics* 110(2), 353–377.
- Harbaugh, W.T., A. Levinson & D.M. Wilson (2002). Reexamining the empirical evidence for an environmental Kuznets curve. *Review of Economics and Statistics* 84(3), 541–551.
- Harris R., J. Moffat & V. Kravtsova (2011). In search of 'W'. *Spatial Economic Analysis* 6(3), 249–270.
- Ketenci, N. (2018). The environmental Kuznets curve in the case of Russia. *Russian Journal of Economics* 4(3), 249–265.
- Kuznets, S. (1955). Economic growth and income inequality. *American Economic Review* 45(1), 1–28.
- LeSage, J. & R.K. Pace (2009). *Introduction to spatial econometrics*. Chapman and Hall/CRC.
- Maddison, D. (2006). Environmental Kuznets curves: A spatial econometric approach. *Journal of Environmental Economics and Management* 51(2), 218–230.
- Martinez-Zarzoso, I. & A. Bengochea-Morancho (2004). Pooled mean group estimation of an environmental Kuznets curve for CO<sub>2</sub>. *Economics Letters* 82(1), 121–126.
- Millimet, D.L., J.A. List & T. Stengos (2003). The environmental Kuznets curve: Real progress or misspecified models? *Review of Economics and Statistics* 85(4), 1038–1047.

- Millo, G. & G. Piras (2012) splm: Spatial panel data models in R. *Journal of Statistical Software* 47(1), 1–38.
- Olivier, J.G. & J.A.H.W. Peters (2018). Trends in global CO2 and total greenhouse gas emissions: 2018 report. PBL Netherlands Environmental Assessment Agency, 5.
- Rudenko, D. & D. Skripnuk (2016). Environmental Kuznets curve: The case of arctic Russian regions. *Ecology Management* 3, 209–216.
- Rupasingha, A., S.J. Goetz, D.L. Debertin & A. Pagoulatos (2004). The environmental Kuznets curve for US counties: A spatial econometric analysis with extensions. *Papers in Regional Science* 83(2), 407–424.
- Selden, T.M. & D. Song (1994). Environmental quality and development: Is there a Kuznets curve for air pollution emissions? *Journal of Environmental Economics and Management* 27(2), 147–162.
- Shafik, N. & S. Bandyopadhyay (1992). Economic growth and environmental quality: time series and cross-country evidence. World Bank Policy Research, рабочая статья WPS904.
- Stern, D.I. (2004). The rise and fall of the environmental Kuznets curve. *World Development* 32(8), 1419–1439.
- Vornovytsky M. & J. Boyce (2010). Economic inequality and environmental quality: Evidence of pollution shifting in Russia. University of Massachusetts Working Paper Series, No. 217.2010.
- Yang, X., F. Lou, M. Sun, R. Wang & Y. Wang (2017). Study of the relationship between greenhouse gas emissions and the economic growth of Russia based on the Environmental Kuznets Curve. *Applied Energy* 193, 162–173.

## GRP and environmental pollution in Russian regions: spatial econometric analysis

Vera Ivanova

*National Research University Higher School of Economics, Saint Petersburg, Russia*

The article performs empirical estimation of the relationship between per capita income and per capita pollutant emissions in Russian regions taking into account their spatial interdependence. It is shown that the pollutant emissions in the Russian regions are spatially autocorrelated. The estimation results confirm an inverted U-shaped relationship between per capita income and per capita pollution at the regional level. The estimates of the income turning point suggest that most Russian regions are on an upward part of the environmental Kuznets curve, i.e., an increase in GRP is associated with higher pollution levels.

*Keywords: environmental Kuznets Curve, spatial econometrics, Moran's index, Russian regions*

*JEL Classification: C23, O13, O44, Q53*

# Улучшают ли спатальные структуры прогнозы волатильности?\*

Станислав Анатольев<sup>†</sup>

*Российская экономическая школа, Москва, Россия  
CERGE-EI, Прага, Чехия*

Станислав Храпов<sup>‡</sup>

*Schenker AG, Франкфурт-на-Майне, Германия*

Мы оцениваем, используя прогнозные эксперименты на данных по доходностям акций, предсказательную способность спатально-структурированных спецификаций ВЕКК для волатильности в сравнении со стандартными моделями ВЕКК. Подтверждается, что класс спатальных ВЕКК-моделей потенциально улучшает качество прогнозов многомерных волатильностей. В то же время разные критерии качества предсказаний резко расходятся в том, какие из типов ограничений на матрицы коэффициентов являются наиболее выгодными, какая степень однородности матричных коэффициентов наиболее благоприятна, и какие критерии группировки активов и количество групп обеспечивают наибольшее улучшение прогнозов волатильности. Состав портфеля и количество акций в нём также сильно влияют на улучшение качества предсказаний спатально-структурированной ВЕКК по сравнению с обычной конфигурацией.

## 1 Введение

Критическим моментом в моделировании многомерной волатильности является размерность пространства параметров, которая имеет громадное влияние на качество предсказаний волатильности. В то время как в последние десятилетия было предложено множество многомерных GARCH-моделей, начиная с сильно параметризованного VEC-представления (Bollerslev, Engle & Wooldridge 1988), одним из наиболее популярных остается ВЕКК-представление (Engle & Kroner 1995),<sup>1</sup> которое предоставляет элегантно решение проблемы сверхпараметризации многомерных GARCH-моделей вкуче с решением проблемы положительной определённости прогнозов волатильности (по крайней мере при применении к небольшому количеству доходностей). Уравнение ВЕКК(1,1) для  $n$  доходностей выглядит так:

$$H_t = CC' + Au_{t-1}u'_{t-1}A' + BH_{t-1}B',$$

где  $n \times n$ -матрица  $H_t$  — это дисперсия  $n \times 1$ -вектора доходностей  $u_t$ , условная на информации в момент времени  $t - 1$ ,  $A$  — это  $n \times n$ -матрица «влияния новостей»,  $B$  — это  $n \times n$ -матрица «обратных связей», а  $C$  — это нижнетреугольная  $n \times n$ -матрица разложения Холецкого для матрицы констант.

---

\*Цитировать как: Анатольев, Станислав & Станислав Храпов (2019) «Улучшают ли спатальные структуры прогнозы волатильности?», Квантиль, №14, стр. 63–81. Citation: Anatolyev, Stanislav & Stanislav Khrapov (2019) “Do spatial structures yield better volatility forecasts?” Quantile, No.14, pp. 63–81.

<sup>†</sup> Адрес: 121353, г. Москва, Сколковское шоссе, дом 45. Электронная почта: [sanatoly@nes.ru](mailto:sanatoly@nes.ru)

<sup>‡</sup> Адрес: Edmund-Rumpler-Straße 3, 60549 Frankfurt am Main. Электронная почта: [khrapovs@gmail.com](mailto:khrapovs@gmail.com)

<sup>1</sup> Другая широко распространенная многомерная GARCH-модель, Динамические условные корреляции (Dynamic Conditional Correlation, Engle 2002), похоже, содержит некоторые проблемы теоретического плана (см. Caporin & McAleer 2012 и Aielli 2013) и эмпирически похожа на скалярную ВЕКК-модель (Caporin & McAleer 2008).

Степень параметризации ВЕКК-моделей в свою очередь сильно варьируется со своей формой, зависящей от количества ограничений, накладываемых на матрицы  $A$  и  $B$ . В полной ВЕКК-модели эти матрицы неограничены,<sup>2</sup> что приводит к  $n^2$  параметрам в каждой из них. В диагональной ВЕКК-модели матрицы  $A$  и  $B$  диагональны (так что в уравнении выше  $A = \text{dg}(a)$  и  $B = \text{dg}(b)$ ), что приводит к  $n$  параметрам в каждой из них. Наконец, в скалярной ВЕКК-модели (Ding & Engle 2001) матрицы  $A$  и  $B$  пропорциональны единичной (так что  $H_t = CC' + \alpha^2 u_{t-1} u_{t-1}' + \beta^2 H_{t-1}$ ), что приводит к одному параметру в каждой. В матрице  $C$  разных элементов  $\frac{1}{2}n(n+1)$  в каждой из трёх стандартных ВЕКК-моделей.<sup>3</sup> Краткое описание содержится в верхней части таблицы 1. Степень параметризации сильно меняется от формы к форме и, естественно, может сильно влиять на качество прогнозирования. Имеется ощущение, что полная ВЕКК-модель, возможно, слишком сильно параметризована, и какая-нибудь из ограниченных форм, скорее всего, способна лучше прогнозировать волатильность.

Недавно Sarojin & Paguolo (2015) предложили промежуточную форму для многомерных GARCH-моделей, которая накладывает ограничения, основанные на спатальной структуре активов, чьи доходности моделируются. Для полной ВЕКК-модели эти ограничения, налагающие диагональность на матричные коэффициенты в линейной комбинации спатальных взвешивающих матриц, уменьшают количество параметров с  $O(n^2)$  до  $O(n)$  таким же образом, как формулируются спатальные авторегрессии и модели спатальных ошибок (см., например, LeSage & Pace 2009). Структурированная по близости ВЕКК-модель, таким образом, подразумевает перетекания волатильности внутри групп активов, похожих по одному или нескольким критериям. В разделе 2 детально описана конструкция спатальных ВЕКК-структур, а краткое описание содержится в нижней части таблицы 1.

Цель настоящей статьи — выявить, используя реальные данные по ликвидным акциям, потенциал спатальных форм из ВЕКК-класса по улучшению качества прогнозов многомерной волатильности по сравнению со стандартными моделями ВЕКК. Как следует из эмпирического приложения в Sarojin & Paguolo (2015), быстрый ответ — да, есть позитивный и ощутимый потенциал.<sup>4</sup> Если мы это подтвердим (и на самом деле да, подтверждаем), нашей очередной целью является понять, какие типы ограничений на матрицы спатальных коэффициентов наиболее обещающие и определить место наиболее выгодных спатальных ВЕКК-форм в линейке полных/диагональных/скалярных форм стандартной ВЕКК-модели. В частности, ответы на следующие вопросы могут представлять интерес. Находится ли качество прогнозов спатальных ВЕКК-моделей в промежутке между качеством, обеспечиваемым полной и диагональными формами стандартной ВЕКК, или же в промежутке между качеством, обеспечиваемым диагональными и скалярной формами стандартной ВЕКК? Какова «оптимальная» степень однородности на диагоналях матриц коэффициентов? Каково «оптимальное» количество критериев группировки? Какие критерии группировки явля-

<sup>2</sup>Не считая ограничений, гарантирующих стационарность процесса волатильности.

<sup>3</sup>Метод таргетирования волатильности (Engle & Mezrich 1996) помогает уменьшить размерность вектора параметров оптимизационной задачи разделением оценивания на два шага: оценивание безусловной дисперсии  $\hat{\Omega}$  непосредственно из данных на первом шаге и максимизация ограниченного (квази-)правдоподобия, соответствующего модифицированному дисперсионному уравнению  $H_t = \hat{\Omega} + A(u_{t-1} u_{t-1}' - \hat{\Omega})A' + B(H_{t-1} - \hat{\Omega})B'$  на втором шаге.

Мы не применяем таргетирование волатильности по нескольким причинам, среди которых, в порядке возрастания важности: (а) мы не рассматриваем очень высокомерные приложения; (б) как выяснилось в Anatolyev & Khrarov (2015), большинство оценок и критериев более смещена при таргетировании волатильности, чем когда его избегают; (в) спатальные версии ВЕКК-модели не позволяют таргетировать волатильность без изменения структуры моделей; (г) на первом шаге процедуры таргетирования волатильности матрица безусловных дисперсий, содержащая  $\frac{1}{2}n(n+1)$  различных элементов, оценивается непараметрически из тех же данных, так что таргетирование волатильности не больно-то уменьшает степень параметризации.

<sup>4</sup>Более того, симуляции в Sarojin & Paguolo (2015) показывают, что даже неверно специфицированные, но более компактные спатальные ВЕКК-спецификации могут иметь преимущество перед стандартными или полными спатальными ВЕКК-моделями в терминах прогнозной способности.

ются наиболее «важными» в обеспечении наибольшего улучшения прогнозов волатильности?

К сожалению, выглядит так, что нет четких ответов на эти вопросы. Существует определённый потенциал спатального структурирования ВЕКК-модели в улучшении прогнозирования волатильности в сравнении со стандартной ВЕКК-моделью. Однако, это улучшение очень чувствительно к таким факторам, как критерии качества прогнозирования, типы накладываемых ограничений, количество групп в спатальной структуре и критерии, используемые для формирования групп. Результаты также сильно могут меняться в зависимости от количества акций в рассматриваемых портфелях и от состава портфелей.

Статья организована следующим образом. Мы представляем спатальную ВЕКК-модель и её различные ограниченные формы в разделе 2. В разделе 3 описываются схемы и алгоритмы, которые мы используем в эмпирическом эксперименте, а данные — в разделе 4. В разделе 5 содержатся результаты и их обсуждение. Наконец, раздел 6 завершает статью. Немного об обозначениях: для вектора  $x$  мы используем обозначение  $\text{dg}(x)$  для диагональной матрицы, в которой главная диагональ заполняется элементами вектора  $x$ , а  $\mathbf{1}_n$  обозначает вектор единиц размера  $n$ .

## 2 Спатальная ВЕКК-модель

Вектор размерности  $n$  логарифмов доходностей можно представить как

$$r_t = \mu_t + H_t^{-1/2} \varepsilon_t,$$

где  $\mu_t$  — это  $n$ -вектор условных средних,  $H_t$  —  $n \times n$ -матрица условных дисперсий, а  $\varepsilon_t$  — вектор независимых одинаково распределённых ошибок. В соответствии с общепринятой практикой моделирования условных дисперсий мы оставляем без внимания моделирование условных доходностей и просто приравниваем их к безусловным средним:  $\mu_t = E[r_t]$ . В эмпирической части мы центрируем доходности относительно их выборочного среднего.

Как описано во Введении, если в стандартной ВЕКК-модели матрицы  $A$  и  $B$  диагонально ограничены, т.е.  $A = \text{dg}(a)$  и  $B = \text{dg}(b)$ , то это приводит к диагональному ВЕКК-представлению, а если матрицы  $A$  и  $B$  пропорциональны единичной матрице, т.е.  $A = \alpha I_n$  и  $B = \beta I_n$ , то это ограничение приводит к скалярному ВЕКК-представлению; см. верхнюю часть таблицы 1.

В общей спатальной ВЕКК-модели матрицы коэффициентов имеют следующую структуру. Пусть  $m$  матриц  $W_1, W_2, \dots, W_m$  будут спатальными весовыми матрицами, обычно представляющими группировку активов по  $m$  критериям.<sup>5</sup> Матрицы  $A$  и  $B$  ограничены следующим образом:

$$A = \text{dg}(a_0) + \sum_{i=1}^m \text{dg}(a_i) W_i,$$

<sup>5</sup>Предположим, существует четыре актива, которые сгруппированы в две группы по определённому критерию (например, отрасль, размер и т.д.) и организованы соответственно. Тогда  $n = 4$ ,  $m = 1$ , и единственная спатальная весовая матрица выглядит следующим образом:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В случае, если в одной из групп больше двух активов, соответствующие строки матрицы  $W_1$  содержат число, обратное числу активов в группе минус единица: например, если в группе 5 активов, то соответствующие строки заполнены  $\frac{1}{4}$  и 0. Более детальное описание конструкции весовых матриц см. в LeSage & Pace (2009) и Caporin & Paruolo (2015).

$$B = \text{dg}(b_0) + \sum_{i=1}^m \text{dg}(b_i) W_i,$$

в то время как постоянная во времени матрица  $CC'$  имеет следующую структуру:

$$D^{-1} \text{dg}(d_0) (D')^{-1},$$

где

$$D = I_n - \sum_{i=1}^m \text{dg}(d_i) W_i.$$

Идея такой структуры матриц  $A$ ,  $B$  и  $D$  заключается в учете эффектов взаимосвязей между волатильностями активов, принадлежащих одной группе. В то время как структура матриц  $A$  и  $B$  похожа на таковую AR(1)-коэффициента в спатальной авторегрессионной модели (SAR), структура матрицы  $CC'$  соответствует структуре в модели спатальной ошибки (SEM). Более детальное описание см. в LeSage & Pace (2009) и Caporin & Paruolo (2015). Такие ограничения делают спатальную ВЕКК-модель ближе к диагональной ВЕКК модели, не приводя к их полной идентичности, но сохраняя возможность моделирования наиболее важных взаимосвязей волатильностей между активами. Они снижают число параметров с  $O(n^2)$  до  $O(n)$ ; см. нижнюю часть таблицы 1.

Caporin & Paruolo (2015) предложили спатальную (или гетерогенную) ВЕКК-модель, которую можно ограничить еще сильнее посредством введения полных или частичных ограничений на вектора  $a_i$ ,  $b_i$  и  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . В частности, полная гомогенность предполагает одинаковую взаимосвязь между активами для каждой группы, т.е. гомогенность векторов  $a_i$ ,  $b_i$  и  $d_i$  для всех  $i = 1, \dots, m$ , или, формально,  $a_i = \alpha_i \mathbf{1}_n$ ,  $b_i = \beta_i \mathbf{1}_n$ ,  $d_i = \delta_i \mathbf{1}_n$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; в то же время вектора  $a_0$  и  $b_0$  остаются без ограничений. Групповая гомогенность не требует такого ограничения, так что гомогенность проявляется только внутри групп, специфичных для конкретного критерия группировки:

$$a_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} \beta_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \beta_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}, \quad d_i = \begin{bmatrix} \delta_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \delta_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $k_i$  — это число групп для критерия  $i$ , а  $n_k$  — это число активов в группе  $k$ . Итого, мы используем дополнительный набор ограничений, приводящий наиболее ограниченную гомогенную спатальную ВЕКК-модель к стандартной ВЕКК-конфигурации, дополнительно предполагая, что вектора  $a_0$  и  $b_0$  тоже гомогенны для всех активов:  $a_0 = \alpha_0 \mathbf{1}_n$  и  $b_0 = \beta_0 \mathbf{1}_n$ . Мы называем такую спецификацию «скалярной гомогенной» спатальной ВЕКК.

В нашем эмпирическом эксперименте мы проверяем три значения  $m$ . В случае  $m = 1$  принцип группировки — это отрасль, к которой принадлежит компания, страна, где она зарегистрирована, или капитализация компании, которая принимает только два значения — крупная или маленькая. Когда  $m = 2$ , используются две категории из трех, а если  $m = 3$ , то все три. Дополнительно мы вводим искусственную конструкцию, где  $m = 1$  без группировки, или, другими словами, когда все активы принадлежат к одной и той же группе (которую, например, тривиально можно назвать «актив»); соответственно, спатальная взвешивающая матрица равна  $W_1 = \mathbf{1}_n \mathbf{1}'_n - I_n$ . Эта ситуация (которую мы называем «единственная группа») служит связующим звеном между стандартной спецификацией ВЕКК и спатальной ВЕКК и предназначена подчеркнуть достоинства и недостатки введения «равномерной» спатальной структуры в модель ВЕКК без использования гетерогенности спатальных ограничений.

Таблица 1: ВЕКК-уравнения и ограничения

ВЕКК	Тип ограничения	Новостной эффект	Обратная связь	Константа	Число параметров
Стандартная	Полная	$A$	$B$	$CC'$	$2n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)$
	Диагональная	$\text{dg}(a)$	$\text{dg}(b)$	$CC'$	$2n + \frac{1}{2}n(n+1)$
	Скалярная	$\alpha I_n$	$\beta I_n$	$CC'$	$2 + \frac{1}{2}n(n+1)$
Спациальная	Гетерогенная	$a_i$ свободный	$b_i$ свободный	$d_i$ свободный	$3(m+1)n$
	Гомогенная по группам	$a_0$ свободный $a_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}$	$b_0$ свободный $b_i = \begin{bmatrix} \beta_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \beta_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}$	$d_0$ свободный $d_i = \begin{bmatrix} \delta_{i,1} \mathbf{1}_{n_1} \\ \vdots \\ \delta_{i,k_i} \mathbf{1}_{n_{k_i}} \end{bmatrix}$	$3(n+mk)$
	Гомогенная	$a_0$ свободный $a_i = \alpha_i \mathbf{1}_n$	$b_0$ свободный $b_i = \beta_i \mathbf{1}_n$	$d_0$ свободный $d_i = \delta_i \mathbf{1}_n$	$3(n+m)$
	Скалярно гомогенная	$a_0 = \alpha_0 \mathbf{1}_n$ $a_i = \alpha_i \mathbf{1}_n$	$b_0 = \beta_0 \mathbf{1}_n$ $b_i = \beta_i \mathbf{1}_n$	$d_0$ свободный $d_i = \delta_i \mathbf{1}_n$	$n + 3m + 2$

Примечания: в спациальной структуре  $A = \text{dg}(a_0) + \sum_{i=1}^m \text{dg}(a_i) W_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $B = \text{dg}(b_0) + \sum_{i=1}^m \text{dg}(b_i) W_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $CC' = D^{-1} \text{dg}(d_0) (D')^{-1}$ , где  $D = I_n - \sum_{i=1}^m \text{dg}(d_i) W_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Вектор  $d_0 > 0$  всегда неограничен.

Также, в случае  $m = 2$  мы рассматриваем спатильную конструкцию, где мы преднамеренно делаем ошибку в сортировке активов по группам. В частности, мы предполагаем, что фирмы в разных странах и разных отраслях спатильно связаны. В случае четырех активов существует только одна такая ошибочная конфигурация (которую мы называем как «ошибочная группировка»). Это позволяет увидеть, насколько критична корректная спатильная классификация при ее использовании в целом.

### 3 Оценивание и анализ результатов

#### 3.1 Оценивание

Для оценивания параметров модели мы используем метод гауссовского максимального квази-правдоподобия. Гауссовская логарифмическая функция правдоподобия (после аффинной трансформации) равняется

$$l_t(\theta) = -\ln |H_t| - u_t' H_t^{-1} u_t,$$

где  $H_t$  определяются рекурсивно посредством

$$H_t = CC' + Au_{t-1}u_{t-1}'A' + BH_{t-1}B'.$$

Мы максимизируем логарифмическую функцию квази-правдоподобия  $\sum_{t=1}^T l_t(\theta)$  путем выбора вектора  $\theta$ , который варьируется по длине в зависимости от спецификации модели ВЕКК (см. таблицу 1). С большим числом параметров в некоторых спецификациях проблема численной оптимизации становится определяющей для поиска «верного» набора оценок параметров среди потенциального множества локальных максимумов. Описанная ниже итеративная процедура гарантирует, что оптимизация сходится к глобальному максимуму.

С целью оценивания стандартной ВЕКК модели мы выбираем начальные значения параметров в соответствии со следующим правилом.

- Начальные значения для скалярной модели, параметров  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\sqrt{0.2}$  и  $\sqrt{0.6}$ .
- Начальные значения для диагональной модели, векторов  $a$  и  $b$ :  $\hat{\alpha}\mathbf{1}_n$  и  $\hat{\beta}\mathbf{1}_n$ , где  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  оценены при скалярном ограничении на предыдущем шаге.
- Начальные значения для полной модели, матриц  $A$  и  $B$ :  $\text{dg}(\hat{a})$  и  $\text{dg}(\hat{b})$ , где  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  оценены при диагональном ограничении на предыдущем шаге.
- Начальные значения для  $C$  вычисляются с помощью декомпозиции Холецкого матрицы  $S - ASA' - BSB'$ , где  $S = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t u_t'$  — безусловная выборочная дисперсия  $u_t$ , а  $A$  и  $B$  выбраны согласно предыдущему шагу.

С целью оценивания спатильной модели ВЕКК мы выбираем начальные значения параметров в соответствии со следующим правилом.

- Начальные значения для скалярной гомогенной модели,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ :  $\sqrt{0.2}$  и  $\sqrt{0.6}$ , соответственно; а  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — нули. Начальные значения для  $d_0$  берутся из диагональных элементов  $S - ASA' - BSB'$ , где  $S = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t u_t'$  — безусловная выборочная дисперсия  $u_t$ .
- Начальные значения для гомогенной модели,  $a_0$  и  $b_0$ :  $\hat{\alpha}_0\mathbf{1}_n$  и  $\hat{\beta}_0\mathbf{1}_n$ , соответственно;  $d_0$ :  $\hat{d}_0$ ;  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , и  $\delta_i$ :  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i$  и  $\hat{\delta}_i$ , соответственно,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Все параметры с крышками наследуются от скалярных гомогенных оценок с предыдущего шага.

- Начальные значения для модели гомогенных групп,  $a_0$ ,  $b_0$  и  $d_0$ :  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{b}_0$ , и  $\hat{d}_0$ , соответственно;  $\alpha_{i,j}$ ,  $\beta_{i,j}$ , и  $\delta_{i,j}$ :  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i$  и  $\hat{\delta}_i$ , соответственно,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, k_i$ . Все параметры с крышками приравниваются к гомогенным оценкам с предыдущего шага.
- Начальные значения для гетерогенной модели,  $a_0$ ,  $b_0$  и  $d_0$ :  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{b}_0$ , и  $\hat{d}_0$ , соответственно;  $a_i$ ,  $b_i$ , и  $d_i$ :  $[\hat{\alpha}_{i,1}\mathbf{1}'_{n_1}, \dots, \hat{\alpha}_{i,k_i}\mathbf{1}'_{n_{k_i}}]'$ ,  $[\hat{\beta}_{i,1}\mathbf{1}'_{n_1}, \dots, \hat{\beta}_{i,k_i}\mathbf{1}'_{n_{k_i}}]'$ , и  $[\hat{\delta}_{i,1}\mathbf{1}'_{n_1}, \dots, \hat{\delta}_{i,k_i}\mathbf{1}'_{n_{k_i}}]'$ , соответственно,  $i = 1, \dots, m$ . Все параметры с крышками приравниваются оценкам из модели гомогенных групп с предыдущего шага.

### 3.2 Прогнозирование

Прогнозирование волатильности выполняется на основе движущегося окна фиксированного размера  $L < T$ . В нашем эмпирическом исследовании мы работаем с  $T$ , примерно равным 3500, и  $L$ , примерно равным 2000. Мы начинаем с подвыборкой первых  $L$  наблюдений из всего набора данных. Для этой подвыборки мы оцениваем параметры определенной модели и вычисляем прогнозы с помощью стандартной рекурсии:

$$\hat{H}_{L+1}^f = \hat{C}\hat{C}' + \hat{A}u_L u_L' \hat{A}' + \hat{B}\hat{H}_L \hat{B}'.$$

На следующем шаге мы повторяем цикл, но для подвыборки доходностей  $[u'_2, \dots, u'_{L+1}]$ . Таким образом мы получаем прогноз  $\hat{H}_{L+2}^f$ . Мы повторяем эту операцию до тех пор, пока не исчерпан весь набор доступных данных, что дает нам в итоге  $T - L$  прогнозов  $\{\hat{H}_{L+s}^f\}_{s=1}^{T-L}$ . На первом шаге оценивания с помощью процедуры движущегося окна параметры оцениваются на основе итеративного алгоритма, описанного в разделе 3.1. Далее, начальные значения параметров для оптимизационной процедуры берутся с предыдущего шага. Идея заключается в том, что оценки параметров не должны меняться при одновременном удалении одного наблюдения из выборки и добавлении нового для сохранения ее размера.

### 3.3 Анализ качества прогнозирования

Мы оцениваем качество прогнозов дисперсии на основе трех типов критериев: одни измеряют статистическое качество прогнозирования, другие соответствуют точке зрения распределения активов, а последние соответствуют перспективе управления рисками. Подобно Laurent, Rombouts & Violante (2012), Caporin & McAleer (2014) и Clements, Doolan, Hurn & Becker (2012), мы рассматриваем следующие статистические меры.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>В дополнение к перечисленным ниже, мы вычислили еще три критерия, но не приводим их значения по причине их сильной схожести с уже описанными: Евклидова норма разницы между прогнозами и реализованными значениями

$$\text{eucl} = \frac{1}{k^2} \text{vech}(\hat{H}_{T+1}^f - \tilde{H}_{T+1})' \text{vech}(\hat{H}_{T+1}^f - \tilde{H}_{T+1}),$$

которая, в отличие от нормы Фробениуса, учитывает ковариации только один раз; критерий среднего квадратичного отклонения (MSE)

$$\text{mse} = (s_{T+1}^w - \hat{s}_{T+1}^w)^2,$$

который штрафует излишне большие отклонения реализованной дисперсии портфеля от её прогноза на один шаг вперед; и критерий QLIKE

$$\text{qlike} = \log \hat{s}_{T+1}^w + s_{T+1}^w (\hat{s}_{T+1}^w)^{-1},$$

который в отличие от MSE принимает во внимание асимметрию распределения с позитивным носителем, характерную для доходностей портфеля. Результаты для Евклидовой нормы очень схожи с результатами для нормы Фробениуса; ранжирование на основе MSE схоже с логарифмическим счетчиком, но не настолько четко, и, наконец, результаты использования критерия QLIKE сильно напоминают результаты использования функции потерь, основанной на стоимости риска.

Норма Фробениуса ('frob') квадрата разницы между прогнозом дисперсии  $\hat{H}_{T+1}^f$  и ее реализованным прокси  $\tilde{H}_{T+1}$  — это

$$\text{frob} = \text{tr} \left[ \left( \hat{H}_{T+1}^f - \tilde{H}_{T+1} \right)' \left( \hat{H}_{T+1}^f - \tilde{H}_{T+1} \right) \right],$$

где  $\text{tr}(\cdot)$  — это оператор суммирования диагональных элементов матрицы. Реализованный прокси — это квадрат доходности,  $\tilde{H}_{T+1} = u_{T+1} u_{T+1}'$ . Еще один статистический критерий — это функция потерь Штейна ('stein')

$$\text{stein} = \log \left| \hat{H}_{T+1}^f \right| + u_{T+1}' \left( \hat{H}_{T+1}^f \right)^{-1} u_{T+1}.$$

Эта функция потерь — всего лишь (дважды) значение логарифма правдоподобия со знаком минус, вычисленное для прогноза волатильности. Обратим внимание, что оно не зависит от прокси волатильности, что делает критерий свободным от ошибки оценивания, присущей вышеописанным критериям. Как показывают Patton & Sheppard (2009), эти функции потерь робастны к неточным прокси волатильности.

С целью непрямого анализа прогнозов с точки зрения распределения активов мы определяем следующие значения в соответствии с Caron & McAleer (2014) для некоторых весов портфеля  $w$ : реализованных доходностей портфеля,  $r_{T+1}^w = w' r_{T+1}$ , ожидаемых доходностей портфеля,  $\hat{r}_{T+1}^w = w' \hat{\mu}_{T+1}^f$ , реализованных дисперсий портфеля,  $s_{T+1}^w = w' \tilde{H}_{T+1} w$ , и ожидаемых дисперсий портфеля,  $\hat{s}_{T+1}^w = w' \hat{H}_{T+1}^f w$ . В данной статье мы рассматриваем равномерно взвешенные портфели, где  $w = \mathbf{1}_k / k$ .<sup>7</sup> С этими определениями мы используем следующий критерий логарифмического счётчика ('lscore') (см. также Patton & Sheppard, 2009):

$$\text{lscore} = \log \hat{s}_{T+1}^w + \left( r_{T+1}^w - \hat{r}_{T+1}^w \right)^2 \left( \hat{s}_{T+1}^w \right)^{-1}.$$

Эта функция потерь сильно напоминает (дважды) логарифм гауссовской функции правдоподобия со знаком минус, вычисленной для прогноза дисперсии портфеля.

В терминах управления рисками наиболее важные и практичные критерии основаны на стоимости риска. Стоимость риска портфеля определяется как

$$\text{var}_T(\alpha) = Q_\alpha \sqrt{\hat{s}_{T+1}^w},$$

где  $Q_\alpha$  — это  $\alpha$ -квантиль распределения доходности портфеля. Соответствующая функция потерь ('var'), используемая в Caron & McAleer (2008), определяется как

$$\text{var} = \begin{cases} 1 + e_{T+1}^2, & e_{T+1} < 0, \\ 0, & e_{T+1} \geq 0, \end{cases}$$

где  $e_{T+1} \equiv r_{T+1}^w - \text{var}_T(\alpha)$ . В терминологии, принятой в Ferreira & Lopez (2005), каждое событие, когда  $e_{T+1} < 0$  или  $r_{T+1}^w < \text{var}_T(\alpha)$ , называется исключением. Каждое исключение добавляет все растущее значение с более высоким разрывом между доходностью и прогнозом стоимости риска. Любое обратное событие имеет нулевую стоимость.

Чтобы убедиться, что разница между качеством прогнозов между различными моделями статистически значима, мы конструируем доверительные множества моделей (MCS), предложенные в Hansen, Lunde & Nason (2011) и использованные, например, в Laurent, Rombouts

<sup>7</sup>Ещё один возможный вариант заключается во взвешивании, соответствующем минимизации дисперсии, где  $w = \left( \hat{H}_{T+1}^f \right)^{-1} \mathbf{1}_k \left( \mathbf{1}_k' \left( \hat{H}_{T+1}^f \right)^{-1} \mathbf{1}_k \right)^{-1}$ , но эти веса не подходят для сравнения, поскольку они не независимы от выбора модели дисперсии.

& Violante (2012) и Anatolyev & Kobotaev (2018) в контексте прогнозирования волатильности. Коротко, множество моделей доверия — это подмножество моделей, которое содержит лучшую (относительно функции потерь на рассмотрении) модель с определенной вероятностью покрытия. Процедура MCS также производит для всех моделей их индивидуальные  $p$ -значения, которые можно грубо интерпретировать как их шанс быть наилучшей. В нашей имплементации<sup>8</sup> мы использовали блочный бутстрап с длиной, равной квадратному корню от размера выборки,  $B = \sqrt{T}$ .

## 4 Данные

Мы используем два набора данных: один содержит четыре актива, а другой восемь. Назовем их Набор данных А и Набор данных В. Активы выбраны так, что в каждом из них существует естественная группировка с равными размерами групп (два актива для каждой группы), и значения для каждого критерия существенно отличаются друг от друга. Набор данных А, таким образом, содержит два группировочных критерия, а Набор данных В — три группировочных критерия. Использование двух наборов данных позволяет нам, во-первых, убедиться, что тенденции, выявленные для одного, не являются случайными, и во-вторых, с целью уточнить выводы, полученные на маленьком наборе данных.

Оба набора данных начинаются с 3-го января 2002 года и заканчиваются 27-го ноября 2015 года, что дает нам  $T = 3500$  дневных наблюдений. Данные о дневных ценах загружены с сайта Yahoo Finance. Все цены скорректированы на сплиты активов и выплату дивидендов. Размер движущегося окна выбран как  $L = 2000$ . В результате это дает нам  $T - L = 1500$  прогнозов дисперсий для каждой модели/ограничения.

### 4.1 Набор данных А

Набор данных А содержит четыре голубые фишки (тикер актива дан в скобках): Ford Motors (F), Siemens (SIE), Nike (NKE), и Adidas (ADS). Дневные доходности для всей выборки показаны на Рис. 1. Здесь два критерия группировки — по принадлежности к отрасли и по стране регистрации. Таблица 2 иллюстрирует группировку компаний по обоим критериям.

Таблица 2: Группировка в Наборе данных А

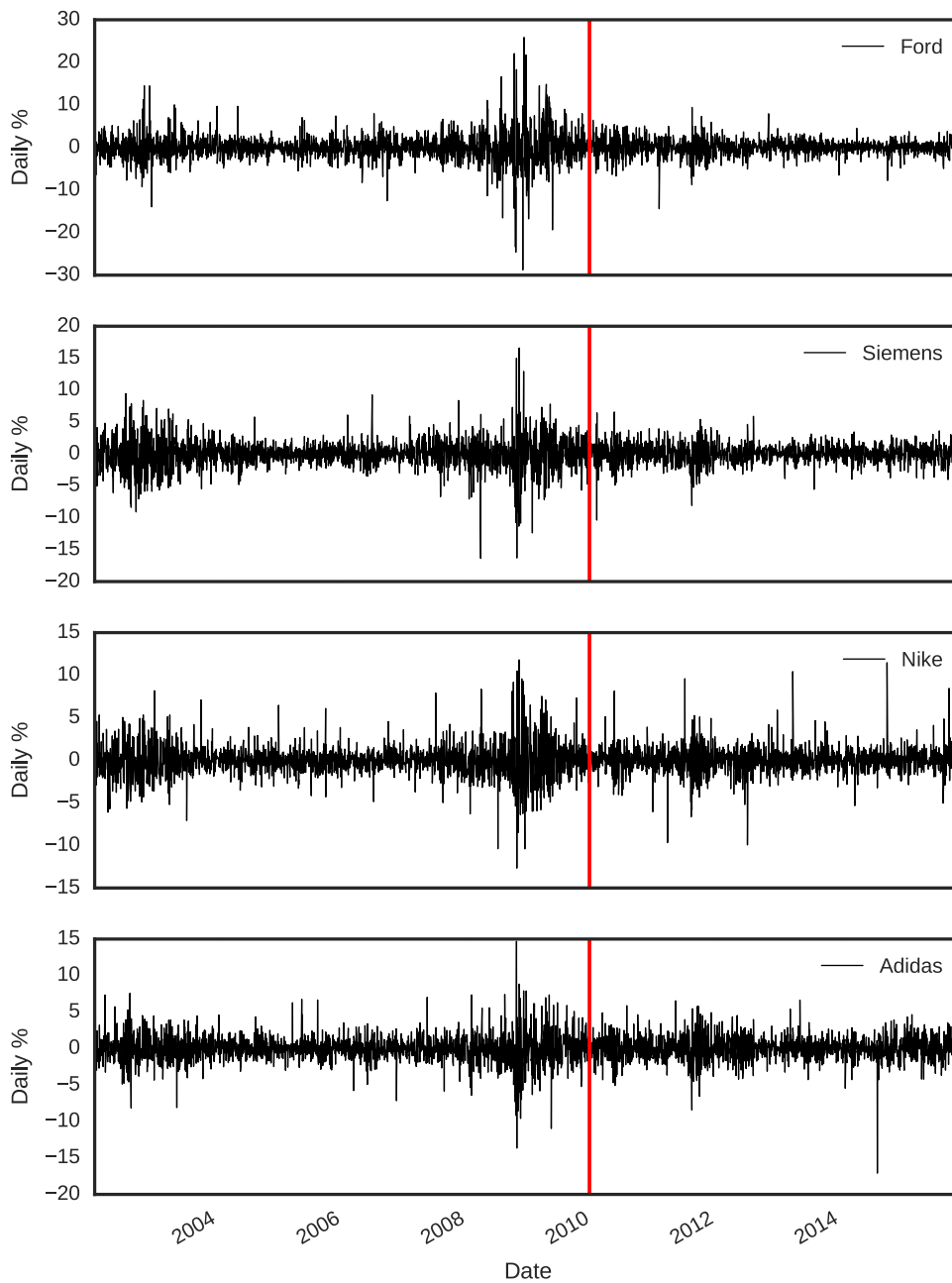
Отрасль	Страна	
	США	Германия
Машиностроение	Ford (F)	Siemens (SIE)
Одежда	Nike (NKE)	Adidas (ADS)

### 4.2 Набор данных В

Набор данных В содержит восемь компаний (тикер и рыночная капитализация на ноябрь 2015 года даны в скобках): Denbury Resources (DNR, \$1.2B), Occidental Petroleum (OXY, \$48B), Yanzhou Coal Mining (YZC, \$910M), CNOOC (CEO, \$50B), Ebix (EBIX, \$1.2B), Adobe Systems (ADBE, \$46B), Sohu.com (SOHU, \$2B), NetEase (NTES, \$21B). Дневные доходности для всей выборки показаны на Рис. 2. Здесь три критерия группировки — по стране, по отрасли и по рыночной капитализации. Таблица 3 иллюстрирует группировку этих компаний по трем критериям.

<sup>8</sup>Мы используем библиотеку ARCH Кевина Шепарда, которая содержит MCS как одну из своих функций, см. <https://github.com/bashtage/arch>.

Рис. 1: Центрированные дневные доходности (%) для Набора данных А

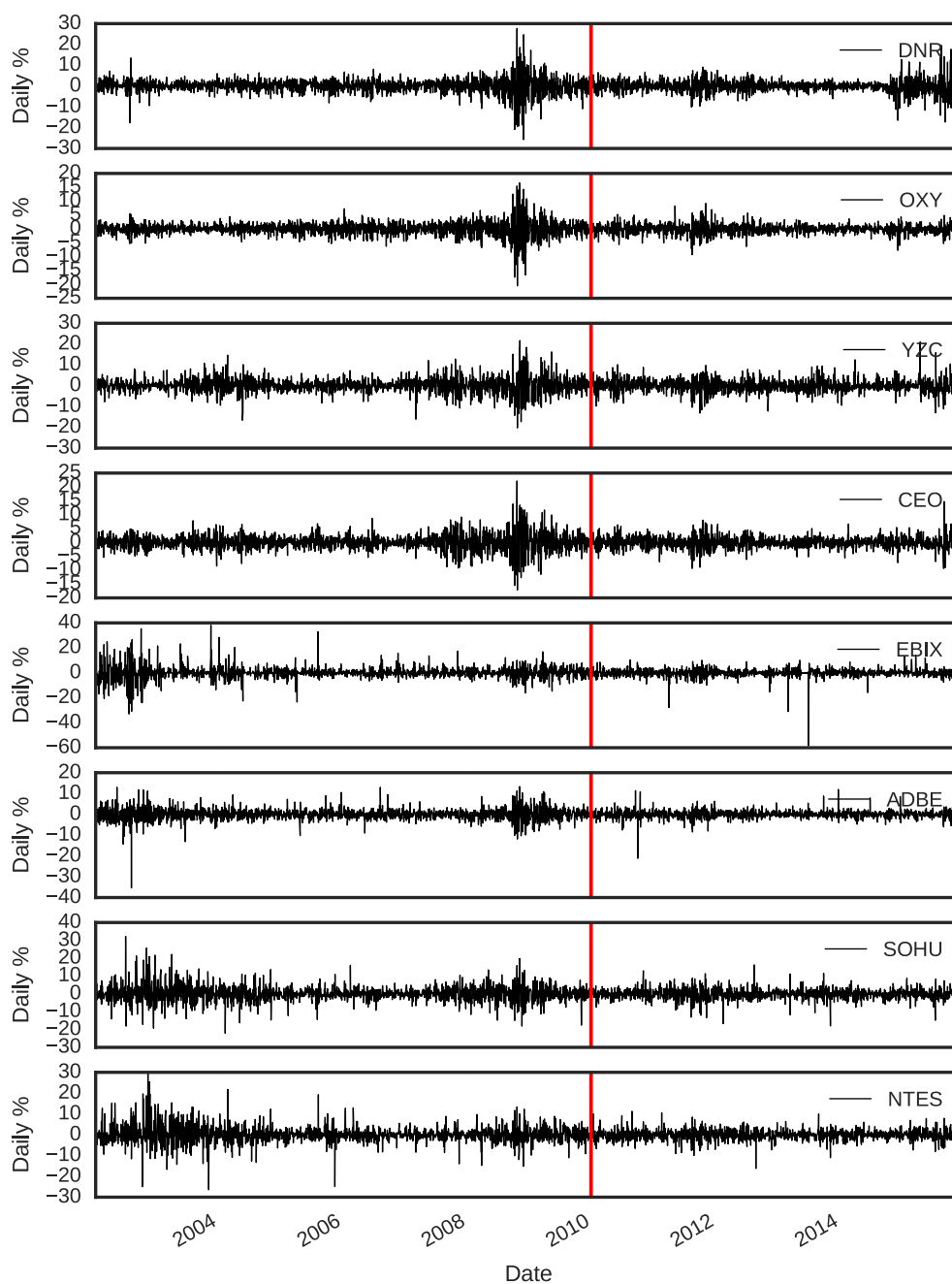


Замечание: вертикальная линия соответствует началу периода вневыборочного прогнозирования.

Таблица 3: Группировка в Наборе данных В

Отрасль	Капитализация	Страна	
		США	Китай
Природные ресурсы	Большая	OXY	CEO
	Маленькая	DNR	YZC
Информационные технологии	Большая	ADBE	NTES
	Маленькая	EBIX	SOHU

Рис. 2: Центрированные дневные доходности (%) для Набора данных В



Замечание: вертикальная линия соответствует началу периода вневыборочного прогнозирования.

## 5 Эмпирические результаты

### 5.1 Набор данных А

Средние значения функций потерь для Набора данных А приведены в таблице 4, а  $p$ -значения для множества моделей доверия приведены в таблице 5.

Таблица 4: Средние значения функций потерь, Набор данных А

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob ( $\times 10^{-2}$ )	stein	lscore ( $\times 10$ )	var ( $\times 10^2$ )
стандартная	скалярная		4,01	6,87	13,07	8,56
	диагональная		4,00	6,86	13,03	8,58
	полная		4,05	7,03	13,02	9,87
спатальная	ск-гомо	обе	3,99	6,86	12,99	8,36
		отрасль	3,99	6,90	12,78	9,30
		страна	3,98	6,89	12,80	9,02
		ложные группы	4,00	6,92	12,83	9,55
		одна группа	4,00	6,86	12,95	8,58
	гомо	обе	3,99	6,83	12,93	8,33
		отрасль	4,87	7,61	13,26	7,61
		страна	4,00	6,87	12,81	9,14
		ложные группы	4,00	6,92	12,79	9,59
		одна группа	4,53	7,38	13,29	7,19
гр-гомо	обе	4,00	6,84	12,93	8,32	
	отрасль	4,87	7,62	13,24	7,79	
	страна	5,50	8,35	13,92	6,22	
	ложные группы	4,00	6,91	12,81	9,42	
гетеро	обе	4,04	6,93	13,07	9,08	
	отрасль	4,87	7,62	13,24	7,79	
	страна	5,50	8,35	13,92	6,22	
	ложные группы	4,00	6,92	12,79	9,80	
	одна группа	4,04	6,90	12,98	9,68	

Стоит обратить внимание, что  $p$ -значения MCS для стандартных моделей ВЕКК весьма малы (полная ВЕКК-модель доминирует модели с ограничениями, за исключением критерия 'var'), в то время как самые большие  $p$ -значения относятся к спатально-структурированной модели ВЕКК. В частности, самое большое  $p$ -значение среди стандартных спецификаций — это 32% для «полной» в соответствии с нормой Фробениуса. Тот же самый критерий не отвергает любую группировку при использовании скалярно-гомогенного спатального ограничения, что видно по минимуму  $p$ -значения, равному 42% в первой колонке таблицы 5. Это происходит вне зависимости от рассматриваемого критерия, но критерий может резко повлиять на выбор лучшей группировки и спатального ограничения. Обратим внимание, что гетерогенные (т.е. наименее ограниченные) спатальные ВЕКК-модели без использования группировки («одна группа») улучшили прогнозную эффективность по сравнению со стандартной полной ВЕКК-моделью:  $p$ -значения 42% против 32% в случае нормы Фробениуса, 87% против 29% в случае нормы Штейна и т.д. Также, гомогенные и скалярные спатальные спецификации демонстрируют лучшую прогнозную эффективность по сравнению с диагональной и скалярной стандартными спецификациями для тех же мер. Это является сигналом того, что внедрение спатальной структуры в модель ВЕКК способно улучшить ее предсказательную способность.

Таблица 5:  $p$ -значения множеств моделей доверия, Набор данных А

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob	stein	lscore	var
стандартная	скалярная	диагональная	3,0	13,9	0,0	28,7
		полная	16,4	11,5	0,1	28,7
			31,9	29,3	20,4	8,6
спатальная	ск-гомо	обе	42,6	42,0	0,0	28,7
		отрасль	96,3	5,4	<b>100,0</b>	0,2
		страна	<b>100,0</b>	27,0	86,4	0,1
		ложные группы	88,9	19,1	4,8	1,1
		одна группа	99,8	87,5	5,1	40,0
	гомо	обе	99,8	<b>100,0</b>	9,9	28,7
		отрасль	0,0	0,0	0,1	0,0
		страна	99,8	87,5	75,6	4,9
		ложные группы	99,8	10,1	<b>100,0</b>	0,0
		одна группа	0,0	0,0	1,8	72,3
	гр-гомо	обе	22,8	87,5	5,1	28,7
отрасль		0,0	0,0	0,4	0,0	
страна		0,0	0,0	0,0	<b>100,0</b>	
ложные группы		11,1	3,6	9,9	0,6	
гетеро	обе	11,1	16,7	0,0	18,7	
	отрасль	0,0	0,0	4,8	0,0	
	страна	0,0	0,0	0,0	72,3	
	ложные группы	99,8	16,7	100,0	0,3	
	одна группа	42,6	87,5	9,9	17,9	

Замечание: Маленькие  $p$ -значения свидетельствуют о том, что модель легко исключается из множества, включающего лучшую.

Большинство наиболее удачных спецификаций являются спатальными спецификациями (обратим особое внимание на значения, равные 100 в таблице 5), с сильными ограничениями (скалярные гомогенные) или с ограничениями средней силы (гомогенные и гомогенные по группам) в зависимости от критерия. Гетерогенная спатальная модель ВЕКК способна произвести хорошие результаты только для непреднамеренных спецификаций — когда группировка не применяется, или когда она организована некорректно. В частности, обратим внимание на две последние строки таблицы, где  $p$ -значения существенно выше, чем для корректно организованных спецификаций. Тот факт, что неверная организация группировки может улучшить прогнозную эффективность не только по сравнению со стандартной моделью ВЕКК, но и по сравнению с корректной организацией, является проблематичным. Корректная группировка по отрасли и/или по стране может привести к существенному улучшению эффективности прогнозирования, но какая именно, сильно зависит от критерия. В то время как один критерий предпочитает спатальную группировку по индустрии, другой критерий может посчитать такую спецификацию наихудшей.

## 5.2 Набор данных В

Далее мы переходим к анализу восьми активов и трех возможных критериев группировки. Дополнительный критерий — это стоимость компании, или размер, согласно рыночной капитализации, которая принимает одно из двух значений — большая капитализация или маленькая. Средние значений функций потерь для Набора данных В приведены в таблице 6, а  $p$ -значения MCS — в таблице 7.

Таблица 6: Средние значения функций потерь, Набор данных В

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob ( $\times 10^{-2}$ )	stein	lscore ( $\times 10$ )	var ( $\times 10^2$ )		
стандартная	скалярная		152,59	19,19	9,72	19,66		
	диагональная		152,04	19,13	9,71	19,50		
	полная		151,81	19,16	9,65	18,34		
ск-гомо		все	152,37	19,17	9,66	18,36		
		отрасль	155,46	19,21	9,64	20,00		
		страна	152,45	19,20	9,63	20,06		
		размер	152,64	19,21	9,65	20,22		
		отрасль+страна	152,38	19,17	9,65	18,50		
		отрасль+размер	152,56	19,18	9,64	18,88		
		страна+размер	152,31	19,17	9,64	18,89		
		одна группа	152,84	19,18	9,66	18,42		
		гомо		все	151,82	19,10	9,65	17,73
				отрасль	151,97	19,15	9,62	19,96
страна	151,89			19,13	9,62	19,66		
размер	151,95			19,16	9,61	19,96		
отрасль+страна	151,90			19,13	9,66	17,98		
отрасль+размер	151,72			19,12	9,64	18,37		
страна+размер	151,92			19,13	9,63	19,01		
спатальная		одна группа	151,83	19,11	9,66	17,71		
		все	152,09	19,14	9,66	17,99		
		отрасль	151,77	19,17	9,60	20,27		
		страна	152,42	19,21	9,63	20,29		
		размер	152,22	19,18	9,63	20,06		
		отрасль+страна	151,78	19,12	9,63	18,50		
		отрасль+размер	151,91	19,16	9,63	19,13		
		страна+размер	152,01	19,12	9,66	18,13		
		гетеро		все	151,69	19,13	9,59	18,16
				отрасль	151,74	19,17	9,58	20,65
				страна	153,24	19,48	9,56	25,88
				размер	152,44	19,27	9,60	20,33
				отрасль+страна	152,06	19,22	9,57	19,65
отрасль+размер	152,19			19,19	9,63	19,13		
страна+размер	151,77			19,18	9,55	19,40		
одна группа	151,93	19,27	9,60	17,84				

Таблица 7:  $p$ -значения множеств моделей доверия, Набор данных В

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob	stein	lscore	var
стандартная	скалярная		53,7	87,8	0,1	6,2
	диагональная		58,1	76,8	0,2	4,2
	полная		56,2	2,4	87,4	54,5
спатальная	ск-гомо	все	28,5	97,7	6,5	37,2
		отрасль	24,8	94,5	0,4	17,7
		страна	38,5	87,6	0,2	13,9
		размер	29,2	92,0	0,2	10,3
		отрасль+страна	26,8	97,7	4,7	36,7
		отрасль+размер	28,5	97,7	6,5	21,5
		страна+размер	26,8	87,0	0,6	19,8
		одна группа	28,5	97,7	1,6	26,5
	гомо	все	64,6	<b>100,0</b>	20,0	54,5
		отрасль	47,9	60,2	0,8	10,3
		страна	66,1	98,0	1,4	19,8
		размер	64,6	99,9	2,4	11,9
		отрасль+страна	64,6	87,7	1,2	22,0
		отрасль+размер	56,2	<b>100,0</b>	17,5	54,5
		страна+размер	66,1	<b>100,0</b>	17,7	54,5
одна группа	66,1	<b>100,0</b>	87,4	56,7		
гр-гомо	все	35,2	92,1	83,6	54,5	
	отрасль	55,0	42,3	83,6	54,5	
	страна	66,1	87,4	0,8	16,4	
	размер	64,6	<b>100,0</b>	2,4	10,3	
	отрасль+страна	47,9	89,9	19,0	54,5	
	отрасль+размер	47,9	76,8	51,9	54,5	
	страна+размер	66,1	99,9	34,9	54,5	
	одна группа	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>	
	гетеро	все	57,4	40,7	83,6	54,5
		отрасль	38,5	27,8	0,2	10,3
страна		64,6	98,0	1,3	16,1	
размер		56,2	44,5	0,4	5,2	
отрасль+страна		47,9	98,0	1,7	13,9	
отрасль+размер		26,4	97,7	63,7	42,5	
страна+размер		64,6	99,4	28,9	42,5	
одна группа	38,5	98,0	56,8	54,5		

Замечание: Маленькие  $p$ -значения свидетельствуют о том, что модель легко исключается из множества, включающего лучшую.

Можно отметить, что для данного набора данных стандартная полная модель ВЕКК дает очень хорошие результаты для большинства критериев оценки (самое маленькое  $p$ -значение 9% для скалярного ограничения и критерия 'lscore'), несмотря на то, что лучшие результаты показаны спатально-структурированными моделями ВЕКК. Обратим внимание, что

расхождения между критериями эффективности (возможно, кроме критерия ‘var’) не так резки, как для Набора данных А, причем норма Фробениуса является наименее дискриминирующей в этом случае. Здесь также наблюдается большая степень гетерогенности в терминах эффективности среди критериев оценки прогнозной эффективности, типов спатальных ограничений и критериев группировки. К примеру, критерий Штейна выбирает гомогенную спецификацию со всеми тремя принципами группировки, в то время как логарифмический счётчик предпочитает гетерогенную спецификацию и особенно группировку по странам и капитализации. Как и ранее, чисто спатальная структура без группировки часто дает возможность модели произвести хорошие прогнозы, так же как и при, казалось бы, более пригодной группировке — обратим внимание, что гомогенная спецификация с одной группой для всех активов выбрана в соответствии с критерием стоимости риска.

Таблица 8:  $p$ -значения множеств моделей доверия, Набор данных В, большая капитализация

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob	stein	lscore	var	
стандартная	скалярная		14,2	80,1	0,6	22,8	
	диагональная		85,5	88,6	1,2	22,8	
	полная		<b>100,0</b>	25,1	30,9	15,0	
ск-гомо	обе	отрасль	12,3	88,6	2,8	22,8	
		страна	23,9	45,3	3,7	1,2	
	ложные группы	одна группа	6,4	18,7	4,5	0,5	
		одна группа	6,4	9,0	1,7	1,3	
		одна группа	47,4	88,6	7,6	22,8	
	гомо	обе	отрасль	99,5	<b>100,0</b>	3,6	22,8
		отрасль	страна	95,6	80,1	2,2	0,5
страна		ложные группы	57,3	73,3	1,2	0,5	
ложные группы		одна группа	85,5	61,2	1,7	0,5	
спатальная	одна группа	одна группа	0,0	0,0	0,0	<b>100,0</b>	
		одна группа	<b>100,0</b>	81,0	3,6	22,8	
		отрасль	10,2	11,7	3,0	10,1	
		страна	<b>100,0</b>	65,4	8,3	0,2	
	гр-гомо	ложные группы	85,5	45,3	1,7	0,5	
		обе	отрасль	85,5	55,4	1,7	22,8
		отрасль	страна	85,5	39,1	1,2	0,5
		страна	ложные группы	0,0	0,0	30,9	3,6
	гетеро	ложные группы	одна группа	<b>100,0</b>	14,1	<b>100,0</b>	0,0
		одна группа	57,3	18,9	7,6	22,8	

Замечание: Маленькие  $p$ -значения свидетельствуют о том, что модель легко исключается из множества, включающего лучшую.

Наиболее удачные группировки включают в себя группировку по капитализации, которая, как ни удивительно, кажется наиболее важным критерием в спатальной структуре. Действительно, среди трех предложенных принципов группировки капитализация, вероятно, наиболее близка к понятию волатильности — компании с малой капитализацией обычно являются более рискованными, чем компании с большой капитализацией. Как и в случае

со стандартными моделями ВЕКК, слишком ограниченная параметризация спатальных ВЕКК-структур, вероятно, снижает шансы на лучшую эффективность.

Таблица 9: *p*-значения множеств моделей доверия, Набор данных В, малая капитализация

ВЕКК-модель	Ограничение	Группировка	frob	stein	lscore	var
стандартная	скалярная		45,1	47,7	27,6	54,9
	диагональная		45,5	59,0	61,7	54,9
	полная		64,0	0,5	<b>100,0</b>	1,6
спатальная	ск-гомо	обе	47,3	40,1	61,6	40,5
		отрасль	62,4	10,5	29,4	0,1
		страна	63,0	29,3	26,9	0,1
		ложные группы	39,4	0,2	72,3	0,1
		одна группа	64,0	27,1	29,4	61,0
	гомо	обе	90,9	91,8	72,3	54,9
		отрасль	45,1	18,1	63,7	0,0
		страна	50,8	30,2	67,4	0,2
		ложные группы	39,4	0,1	64,9	0,1
		одна группа	90,9	<b>100,0</b>	72,3	61,0
гр-гомо	обе	<b>100,0</b>	91,8	72,3	54,9	
	отрасль	22,9	30,5	68,9	0,2	
	страна	45,1	47,7	72,3	0,2	
	ложные группы	31,2	0,1	61,6	0,2	
гетеро	обе	58,4	57,0	72,3	11,2	
	отрасль	50,8	47,7	72,3	0,0	
	страна	36,3	35,2	72,3	0,2	
	ложные группы	0,2	0,0	29,4	61,0	
	одна группа	45,5	18,1	72,3	<b>100,0</b>	

Замечание: Маленькие *p*-значения свидетельствуют о том, что модель легко исключается из множества, включающего лучшую.

Чтобы проверить робастность этих результатов, мы разделили Набор данных В на два — один для компаний с большой капитализацией, а другой для компаний с малой капитализацией; прогнозирование с одним из этих наборов данных (особенно с большой капитализацией) таким образом становится похожим на предыдущий анализ Набора данных А. Результаты для компаний с большой капитализацией из Набора данных В можно найти в таблице 8, а для компаний с маленькой капитализацией — в таблице 9. Можно отметить, что относительно некоторых мер эффективности ('stein' и 'var') полная стандартная модель ВЕКК теряет свой статус одной из лучших (обратим внимание на разницу между 88% и 80% в таблице 7 и соответственно 25% и 15% в таблице 8). Разные спецификации становятся более различимыми по эффективности прогнозирования. К примеру, скалярная гомогенная и гомогенная легко отвергаются для любого критерия группировки в соответствии с логарифмическим счётчиком. Однако, как и для Набора данных А, спатальная структура с некорректной группировкой или без группировки вполне может выиграть у аналогичной спатальной структуры с любой интуитивно обоснованной группировкой. Итого, некоторые более гибкие спатальные струк-

туры имеют больше шансов оказаться среди лучших, но изначально неясно, какое именно спатальное ограничение и какая группировка имеет наибольший шанс стать лучшей.

## 6 Заключение

Представляется, что присутствие спатальной структуры в модели ВЕКК может быть полезным для прогнозирования волатильности в сравнении со стандартной моделью ВЕКК. Однако, этот выигрыш в эффективности прогнозирования очень хрупок и чувствителен ко множеству факторов, таких как выбор критерия оценки прогнозной эффективности, тип наложенных спатальных ограничений, число группировок в спатальной структуре и принципы формирования спатальных групп. Некорректное разделение по группам иногда приводит к прогнозной эффективности, которая как минимум не хуже разделения по корректным, интуитивно обоснованным группам. Результаты также сильно варьируются с числом активов в портфеле и с композицией портфелей.

## Список литературы

- Aielli, G.P. (2013). Dynamic conditional correlation: On properties and estimation. *Journal of Business & Economic Statistics* 31(3), 282–299.
- Anatolyev, S. & S. Khrapov (2015). Right on target, or is it? The role of distributional shape in variance targeting. *Econometrics* 3(3), 610–632.
- Anatolyev, S. & N. Kobotaev (2018). Modeling and forecasting realized covariance matrices with accounting for leverage. *Econometric Reviews* 37(2), 114–139.
- Bollerslev, T., R.F. Engle & J.M. Wooldridge (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy* 96(1), 116–131.
- Caporin, M. & M. McAleer (2008). Scalar BEKK and indirect DCC. *Journal of Forecasting* 27(6), 537–549.
- Caporin, M. & M. McAleer (2012). Do we really need both BEKK and DCC? A tale of two multivariate GARCH models. *Journal of Economic Surveys* 26(4), 736–751.
- Caporin, M. & M. McAleer (2014). Robust ranking of multivariate GARCH models by problem dimension. *Computational Statistics and Data Analysis* 76, 172–185.
- Caporin, M. & P. Paruolo (2015). Proximity-structured multivariate volatility models. *Econometric Reviews* 34, 559–593.
- Clements, A., M.B. Doolan, S.A. Hurn & R. Becker (2012). On the efficacy of techniques for evaluating multivariate volatility forecasts. Working paper, Queensland University of Technology.
- Ding, Z. & R.F. Engle (2001). Large scale conditional covariance matrix models, estimation and testing. *Academia Economic Papers* 29(2), 157–184.
- Engle, R.F. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics* 20(3), 339–350.
- Engle, R. & K.F. Kroner (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory* 11, 122–150.
- Engle, R.F. & J. Mezrich (1996). GARCH for groups. *Risk* 9, 36–40.
- Ferreira, M.A. & J.A. Lopez (2005). Evaluating interest rate covariance models within a value-at-risk framework. *Journal of Financial Econometrics* 3(1), 126–168.
- Hansen, P. R., A. Lunde & J.M. Nason (2011). The model confidence set. *Econometrica* 79, 453–497.
- Laurent, S., J.V.K. Rombouts & F. Violante (2012). On the forecasting accuracy of multivariate GARCH models. *Journal of Applied Econometrics* 27, 934–955.
- LeSage, J. & R.K. Pace (2009). *Introduction to Spatial Econometrics*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis.
- Patton, A.J. & K. Sheppard (2009). Evaluating volatility and correlation forecasts. Глава в *Handbook of Financial Time Series* под редакцией T.G. Andersen, R.A. Davis, J.-P. Kreiss & T. Mikosch. Berlin: Springer, 801–838.

## Do spatial structures yield better volatility forecasts?

**Stanislav Anatolyev**

*CERGE-EI, Prague, Czech Republic  
New Economic School, Moscow, Russia*

**Stanislav Khrapov**

*Schenker AG, Frankfurt am Main, Germany*

We evaluate, using forecasting experiments with real stock return data, forecasting ability of spatially structured BEKK specifications relative to standard BEKK. We confirm that the class of spatial BEKK has a potential of improving a quality of multivariate volatility forecasts. However, there is a sharp disagreement among forecast performance criteria on which types of further restrictions on coefficient matrices are most promising, on which degree of homogeneity of matrix coefficients is most beneficial, and on which grouping criteria and their number deliver highest improvements in volatility forecasts. The numerosity and composition of the portfolio also have a big influence on how well volatility is forecast by spatially structured BEKK compared to its standard configuration.



# Спациальная модель для оценки эффектов перетекания волатильности на рынке нефти и газа<sup>\*</sup>

Ефросиния Каратецкая<sup>†</sup>

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Москва, Россия*

Валерия Лакшина<sup>‡</sup>

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Нижний Новгород, Россия*

Статья посвящена моделированию эффектов перетекания волатильности, возникающих на рынке нефти и газа. В статье используются данные по дневным ценам акций шестидесяти семи компаний, принадлежащих к нефтегазовому сектору экономики, в тринадцати странах мира. Оценивание эффектов перетекания волатильности осуществлено с помощью спациальной спецификации многомерной модели волатильности ВЕКК. С помощью теста Вонга сравнивается объясняющая способность спациальной ВЕКК и неспациальных GO-GARCH и ADCC, а с помощью тестов Диболда-Мариано и Хансена-Лунде-Нэйсона — их предсказательная способность. По результатам теста Вонга все три рассматриваемые модели имеют равную объясняющую способность на любом разумном уровне значимости. При вневыборочном сравнении тесты не дают четких свидетельств значимого превосходства спациальной спецификации над остальными моделями.

*Ключевые слова: многомерные модели волатильности, спациальные спецификации, рынок нефти и газа, эффекты перетекания волатильности*

*Классификация JEL: C58, C32, Q49*

## 1 Введение

Эффекты перетекания, или распространения, волатильности (volatility spillover effects, далее ЭПВ) являются важной частью понимания закономерностей функционирования финансовых рынков. ЭПВ представляют собой шоки, возникающие на одном рынке (или его части) и вызывающие изменения цен активов на других рынках (частях рынка) (Schmidt, 2005). Можно рассматривать ЭПВ как результат движения капитала между странами, секторами экономики и другими элементами экономических систем (Dornbusch, Park & Claessens, 2000). Например, волатильность обменных курсов может существенно повлиять на цены товаров и поведение рынков в целом (Akman & Bozkurt, 2016). Моделирование межрыночных связей и совместных движений цен финансовых активов играет существенную роль в решении таких важных для инвесторов, финансовых организаций и органов власти практических задач, как хеджирование и регулирование финансовых рынков.

---

<sup>\*</sup>Цитировать как: Каратецкая, Ефросиния & Валерия Лакшина (2019) «Спациальная модель для оценки эффектов перетекания волатильности на рынке нефти и газа», Квантиль, №14, стр. 83–95. Citation: Karatetskaya, Efrosiniya & Valeriya Lakshina (2019) “Volatility spillovers with spatial effects in the oil and gas market,” Quantile, No.14, pp. 83–95.

<sup>†</sup>Институт статистических исследований и экономики знаний, НИУ ВШЭ, Мясницкая ул., д. 11, каб. 444, Москва, 101000. Электронная почта: [ekarateczkaya@hse.ru](mailto:ekarateczkaya@hse.ru)

<sup>‡</sup>Адрес: Кафедра математической экономики, НИУ ВШЭ, Большая Печерская ул., д. 25/12, каб. 411, Нижний Новгород, 603155. Электронная почта: [vlakshina@hse.ru](mailto:vlakshina@hse.ru)

Одной из первых моделей, позволяющих анализировать ЭПВ, является BEKK (Engle & Kroner, 1995). Впоследствии различные модификации этой модели применялись для дальнейшего изучения ЭПВ, например, модель Jaworski & Pitera (2014), включающая в себя копулы; DECO-FIEGARCH (Mensi, Hammoudeh & Kang, 2017); модель Liu, An, Huang & Wen (2017) с вейвлетами; модель Liu, An, Li, Chen, Feng & Wen (2017), построенная на основе сложных сетей; в Gu, Liu & Weng (2017) предложена модификация модели динамических условных корреляций с применением пространственных матриц для анализа рынка недвижимости.

В данной статье мы сосредоточимся на анализе ЭПВ на рынке энергетических носителей, а именно на рынке нефти и газа. Данной теме посвящено значительное количество статей, в том числе Ewing, Malik & Ozfidan (2002), Arouri, Jouini & Nguyen (2012), Lin, Wesseh & Appiah (2014), Lin, Wesseh & Appiah (2014), Kocaarslan, Sari, Gormus & Soytaş (2017), Liu, An, Huang & Wen (2017) и Liu, An, Li, Chen, Feng & Wen (2017).

Например, Arouri, Jouini & Nguyen (2011), Olson, Vivian & Wohar (2014) и Serletis & Xu (2016) используют модель BEKK для оценки ЭПВ между различными рынками. Их результаты указывают на существование прямого распространения волатильности между нефтяным и фондовым секторами экономики независимо от региона исследования. Более того, они показали, что ЭПВ на рынках усиливаются, когда возникает так называемая «ловушка ликвидности» — ситуация, в которой краткосрочная номинальная процентная ставка равна или близка к нулю, — то есть нетрадиционная денежно-кредитная политика укрепляет связи между нефтяным и финансовым рынками.

Liu, An, Huang & Wen (2017) применяют BEKK с вейвлетами для анализа частотных характеристик ЭПВ, используя данные цен на сырую нефть марки WTI, индексов S&P500 и ММВБ. Авторы находят эмпирические доказательства наличия передачи информации между рынком сырой нефти и фондовым рынком США, которая в основном поддерживается в краткосрочном периоде и ослабевает в долгосрочном периоде постепенно.

Однако, несмотря на то, что такие модели достаточно понятны и удобны для оценивания и интерпретации ЭПВ, существует проблема нелинейного роста числа оцениваемых параметров, или «проклятие размерности». Чтобы преодолеть эту проблему, Caropin & Paguolo (2015) предложили так называемые спатильные спецификации многомерных моделей волатильности.

Спатильная спецификация позволяет учитывать как временные, так и пространственные эффекты в динамике волатильности (Caropin & Paguolo, 2015). Такие эффекты моделируются с использованием весовых матриц, заданных экзогенно. Элементы весовой матрицы либо являются нулями и единицами (тогда она называется бинарной матрицей), либо определяются с помощью экономических расстояний (см., например, Borovkova, 2016). В литературе можно найти примеры применения спатильных спецификаций многомерных моделей волатильности для решения различных финансовых задач, включая расчет оптимального коэффициента хеджирования (Gu, Liu & Weng, 2017), прогнозирования (Анатольев & Храпов, 2019), моделирования эффектов распространения волатильности (Jaworski & Pitera, 2014; Chen & Tian, 2017).

Основная цель данной работы — провести эмпирический анализ ЭПВ на рынке нефти и газа, используя спатильные спецификации многомерных моделей GARCH. В рамках исследования будет проведено сравнение объясняющей и прогнозной силы спатильной BEKK с моделью обобщенной ортогональной GARCH (GO-GARCH, Weide, 2002) и моделью асимметричных динамических условных корреляций (ADCC, Cappiello, Engle & Sheppard, 2006). Указанные модели широко применяются для оценивания ЭПВ, см., например, Kocaarslan, Sari, Gormus & Soytaş (2017) и Gu, Liu & Weng (2017).

## 2 Методология

### 2.1 Многомерные модели волатильности

Основные предпосылки подавляющего большинства рассматриваемых многомерных моделей волатильности заключаются в следующем. Имеется  $n$  временных рядов длины  $T$  для доходностей  $n$  финансовых активов, (1). Доходности  $x_t$  вычисляются как разность логарифмов цен активов в момент времени  $t$ :  $x_t = \log P_t - \log P_{t-1}$ . Логарифмирование цен финансовых активов восходит к работам «отца» финансовой экономики Луи Башелье (Bachelier, 1900). Итак,

$$x_t = \mathbb{E}(x_t | \mathcal{F}_{t-1}) + y_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

где  $x_t$  — вектор доходностей финансовых активов размера  $n \times 1$  в момент времени  $t$ ,  $\mathcal{F}_{t-1}$  — вся имеющаяся к моменту  $t - 1$  информация,  $y_t$  — инновации. Уравнение для инноваций, в свою очередь, выглядит как

$$y_t = \Sigma_t^{1/2} \zeta_t, \quad \zeta_t \sim f(0, \Sigma_\zeta; \theta), \quad (2)$$

где  $\Sigma_t$  — условная дисперсия доходностей, или матрица волатильности, т. е.  $\Sigma_t = \mathbb{E}(y_t y_t^T | \mathcal{F}_{t-1})$ ;  $\zeta_t$  — случайная компонента, или стандартизованные инновации;  $f(0, \Sigma_\zeta; \theta)$  — закон распределения вероятностей случайной компоненты с математическим ожиданием 0 и дисперсией  $\Sigma_\zeta$ , вектор  $\theta$  содержит остальные параметры распределения  $f$ . Модели различаются по тому, как параметризована матрица волатильности.

Далее в данной работе мы рассмотрим ряд таких параметризаций, включая, модели BEKK, GO-GARCH и ADCC.

**BEKK** Среди многомерных моделей волатильности модель BEKK, названная по первым буквам фамилий ее создателей — Baba, Engle, Kraft & Kroner (1989), является одной из наиболее простых и интуитивно понятных для интерпретации. В этой модели динамика волатильности задается уравнением

$$\Sigma_t = CC^T + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q A_{ik} y_{t-i} y_{t-i}^T A_{ik}^T + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p B_{jk} \Sigma_{t-j} B_{jk}^T, \quad (3)$$

где  $A, B, C$  — матрицы параметров размера  $n \times n$ , причем  $C$  — нижнетреугольная матрица;  $p$  и  $q$  имеют тот же смысл, что и в модели GARCH( $p, q$ ), т. е. порядок авторегрессии и скользящего среднего;  $K$  — порядок модели BEKK;  $\top$  означает транспонирование.

В Engle & Kroner (1995) доказано, что при  $p = q = K = 1$  стационарность в ковариациях матрицы волатильности достигается, если собственные числа матрицы  $A_{11} + B_{11}$  по модулю меньше единицы. При этом в данной модели матрица волатильности положительно определена по построению, т. е. дополнительные условия положительности не требуются. В дальнейшем будет рассматриваться модель BEKK с  $p = q = K = 1$ .

**GO-GARCH** В модели GO-GARCH (обобщенной ортогональной GARCH, Weide, 2002) матрица волатильности параметризована следующим образом:

$$\Sigma_t = X V_t X^T, \quad (4)$$

где  $X$  — матрица, параметризация которой основана на сингулярном разложении (подробности см. в Weide, 2002),  $V_t$  — диагональная матрица, вектор диагональных элементов которой задан уравнением

$$v_t = c + A(y_{t-1} \odot y_{t-1}) + B v_{t-1}, \quad (5)$$

где  $A$  и  $B$  — диагональные матрицы,  $c$  — вектор размера  $n \times 1$ ,  $\odot$  — поэлементное произведение. Уравнение (5) эквивалентно  $n$  одномерным GARCH моделям.

**ADCC** Матрица волатильности в модели с асимметричными динамическими условными корреляциями (ADCC, Capriello, Engle & Sheppard, 2006) параметризована следующим образом:

$$\Sigma_t^{ADCC} = D_t R_t D_t, \quad (6a)$$

$$D_t = \text{diag}(d_t), \quad d_t \odot d_t = v_t, \quad (6b)$$

$$R_t = \text{diag}\left(q_{11,t}^{-1/2} \dots q_{nn,t}^{-1/2}\right) Q_t \text{diag}\left(q_{11,t}^{-1/2} \dots q_{nn,t}^{-1/2}\right), \quad (6c)$$

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta)\bar{Q} + \alpha y_{t-1} y_{t-1}^\top + \beta Q_{t-1} + \gamma \tilde{y}_{t-1} \tilde{y}_{t-1}^\top, \quad (6d)$$

где  $R_t$  — условная корреляционная матрица доходностей,  $\alpha, \beta, \gamma$  — параметры, причем  $\gamma$  отвечает за эффекты асимметрии в волатильности,  $\tilde{y}_{t-1}$  — инновации с нулевым порогом, которые равны  $y_t$ , когда  $y_t$  меньше нуля, и нулю в противном случае. Если параметр  $\gamma$  равен нулю, то получаем модель динамических условных корреляций (Engle, 2002).

## 2.2 Спациальная спецификация ВЕКК

Для моделирования ЭПВ в настоящей работе применяются спациальные спецификации многомерной модели волатильности ВЕКК (Лакшина, 2014; Caporin & Paruolo, 2015; Анатольев & Храпов, 2019). Данный подход аналогичен Billio, Caporin, Frattarolo & Pelizzon (2016), где спациальная ВЕКК применяется для анализа доходности государственных облигаций. Спациальная спецификация модели ВЕКК получается следующим образом:

$$A = \text{diag}(a_0) + \text{diag}(a_1)W, \quad B = \text{diag}(b_0) + \text{diag}(b_1)W, \quad (7a)$$

$$CC^\top = D^{-1} \text{diag}(d_0)(D^\top)^{-1}, \quad D = I_n - \text{diag}(d_1)W, \quad (7b)$$

где  $a_0, a_1, b_0, b_1, d_0, d_1$  — векторы размерности  $n \times 1$ ,  $W$  — весовая матрица,  $\text{diag}(v)$  — диагональная матрица с вектором  $v$  на главной диагонали.

Элементы весовой матрицы  $W$  отражают степень пространственной зависимости между активами. При определении элементов матрицы  $W$  естественно использовать принцип, согласно которому соседние активы оказывают наибольшее влияние друг на друга. Arnold, Stahlberg & Wied (2013) выделяют три различных типа пространственной зависимости для доходности акций: общая зависимость, зависимость внутри отраслей промышленности и зависимость на основе географического положения.

Если пространственная зависимость определяется с помощью качественного критерия, например, принадлежности к стране или сектору экономики, то матрица  $W$  является бинарной:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если актив } j \text{ является соседом для актива } i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Соседями в данном случае называются активы, принадлежащие к одной группе согласно выбранному критерию, например, принадлежащие одной отрасли экономики. По соглашению актив не является соседом самому себе, поэтому на главной диагонали весовой матрицы находятся нули.

Если же выбранный критерий является количественным, то элементы весовой матрицы обычно обратно пропорциональны экономическому расстоянию между активами. Например,  $W_{ij}$  может рассчитываться как ядро би-квадрат от экономического расстояния (см.,

например, Балаш, Балаш & Харламов, 2011):

$$W_{ij} = \left( 1 - \left( \frac{d_{ij}}{b} \right)^2 \right)^2, \quad (9)$$

где  $b$  — расстояние до самого дальнего соседа,  $d_{ij}$  — экономическое расстояние между активами  $i$  и  $j$ , которое вычисляется следующим образом:

$$d_{ij} = \left( \sum_1^k \left( p_i^{(k)} - p_j^{(k)} \right)^2 \right)^{1/k}, \quad (10)$$

где  $k$  — число показателей, учитываемых при расчете экономического расстояния. Очевидно, что с ростом расстояния  $d_{ij}$  степень взаимодействия между активами  $w_{ij}$  снижается. Строки весовой матрицы  $W$  нормированы на единицу, поэтому каждый элемент строки весовой матрицы показывает долю влияния, которая приходится на актив  $i$  со стороны его  $j$ -го соседа.

В рамках данного исследования использована однородная спатальная ВЕКК-спецификация, предполагающая следующие ограничения на векторы параметров:

$$a_0 = \alpha_0 \mathbf{1}_n, \quad a_1 = \alpha_1 \mathbf{1}_n; \quad b_0 = \beta_0 \mathbf{1}_n, \quad b_1 = \beta_1 \mathbf{1}_n; \quad d_1 = \delta_1 \mathbf{1}_n, \quad (11)$$

где  $\mathbf{1}_n$  — единичный вектор размерности  $n$ , а  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \delta_1$  — параметры.

### 2.3 Прогнозирование и критерии сравнения

Для построения одношагового прогноза было использовано свойство рекурсивности уравнения волатильности. Например, для модели ВЕКК прогноз  $\hat{\Sigma}_{L+1}^f$  рассчитывается как

$$\hat{\Sigma}_{L+1}^f = CC^\top + Ay_L y_L^\top A^\top + B\Sigma_L B^\top, \quad (12)$$

где  $L$  — длина внутривыборочного интервала.

Многошаговый прогноз оценивается на основании блочного бутстрапа, как в Billio, Caporin, Frattarolo & Pelizzon (2016). Алгоритм включает в себя несколько шагов. Сначала на внутривыборочном интервале оцениваются параметры уравнения волатильности и рассчитывается матрица волатильности  $\Sigma_t$  в каждый момент времени от 1 до  $L$ . На втором шаге рассчитываются стандартизованные инновации для каждого момента времени:

$$\varepsilon_t = \Sigma_t^{-1/2} y_t. \quad (13)$$

На третьем шаге с помощью случайного выбора с возвращением формируется  $B$  бутстраповских выборок длины  $R$  для стандартизованных инноваций. Обычно  $R = T - L$  — длина вневыборочного интервала. Поскольку бутстрап осуществляется для временных рядов, бутстраповские выборки состоят из блоков длины  $h$  исходного вектора стандартизованных инноваций. На четвертом шаге для каждого  $r$  рассчитываются бутстрапированные инновации  $\hat{y}_{L+r}^{[b]}$  и матрица волатильности  $\hat{\Sigma}_{L+r}^{[b]}$ :

$$\hat{y}_{L+r}^{[b]} = \hat{\Sigma}_{L+r}^{-\frac{1}{2}} \hat{\varepsilon}_{L+r}^{[b]}, \quad (14a)$$

$$\hat{\Sigma}_{L+r+1}^{[b]} = \hat{C}\hat{C}^\top + \hat{A}\hat{y}_{L+r}^{[b]}\hat{y}_{L+r}^{[b]\top}\hat{A}^\top + \hat{B}\hat{\Sigma}_{L+r}^{[b]}\hat{B}^\top, \quad (14b)$$

где  $r = 1, \dots, R$ ,  $b = 1, \dots, B$ . На пятом шаге для каждого  $r$  вычисляется прогноз матрицы волатильности путем усреднения по всем бутстрапированным значениям матрицы волатильности:

$$\hat{\Sigma}_{L+r} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\Sigma}_{L+r}^{[b]}. \quad (15)$$

В настоящей работе  $B = 10000$ .

Для сравнения объясняющей и прогнозной силы спатальной спецификации ВЕКК в качестве бенчмарка взяты модели GO-GARCH и ADCC (см. выше). Все модели оцениваются методом максимального правдоподобия:

$$LL = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\det(H_t)) + y_t^\top \Sigma_t^{-1} y_t. \quad (16)$$

Внутривыборочное сравнение производится с помощью теста Вонга (Vuong, 1989), который может применяться для вложенных моделей. Вневыборочное сравнение производится с помощью тестов Диболда-Мариано (Diebold & Mariano, 1995) и Хансена-Лунде-Нэйсона (Hansen, Lunde & Nason, 2011). Для расчета решающей статистики теста применяются три функции потерь (см. Laurent, Rombouts & Violante, 2012):

$$g_1 = \text{tr} \left( (\Sigma_t - \hat{\Sigma}_t)^\top (\Sigma_t - \hat{\Sigma}_t) \right), \quad (17a)$$

$$g_2 = \text{tr}(\hat{\Sigma}_t^{-1} \Sigma_t) - \log |\hat{\Sigma}_t^{-1} \Sigma_t| - n, \quad (17b)$$

$$g_3 = \frac{1}{6} \text{tr} \left( \Sigma_t^3 - \hat{\Sigma}_t^3 \right) - \frac{1}{2} \text{tr} \left( \hat{\Sigma}_t^2 (\Sigma_t - \hat{\Sigma}_t) \right), \quad (17c)$$

где  $\Sigma_t$  означает истинное значение условной ковариационной матрицы,  $\hat{\Sigma}_t$  — ее прогноз. Первая функция потерь  $g_1$  представляет собой норму Фробениуса и эквивалентна среднеквадратической ошибке для матриц; вторая функция потерь  $g_2$  «налагает штраф» за недооценку прогнозной величины; третья функция потерь  $g_3$  «налагает штраф» за переоценку прогнозной величины. Так как истинное значение условной ковариационной матрицы неизвестно, то в качестве  $\Sigma_t$  используется  $y_t y_t^\top$ .

Суть процедуры Хансена-Лунде-Нэйсона (Hansen, Lunde & Nason, 2011) заключается в том, чтобы путем проведения последовательности тестов выявить множество моделей, предсказательная способность которых превосходит таковую для моделей, не входящих в это множество. При этом гипотеза об одинаковой предсказательной способности моделей, входящих во множество, не отклоняется.

### 3 Оценка эффектов перетекания волатильности для нефтегазового рынка

В настоящей работе используются данные 67 компаний, относящихся к нефтегазовому сектору экономики, из 13 стран мира (Аргентина, Китай, Колумбия, Габон, Кувейт, Нигерия, Катар, Россия, Саудовская Аравия, Южная Африка, Таиланд, Турция и Перу). Для международных компаний страной считается страна, в которой расположен головной офис компании. Страны, вошедшие в выборку, представляют собой страны с уровнем дохода выше среднего и высоким уровнем дохода по классификации Всемирного банка. Данные взяты за период с 27 апреля 2015 г. по 18 января 2018 г., что составляет 634 наблюдения. Источником данных является база данных Thomson Reuters Eikon<sup>1</sup>. Описательная статистика визуализирована с помощью гистограмм ввиду большого числа компаний в выборке, см. Рис. 1.

<sup>1</sup><https://eikon.thomsonreuters.com/>

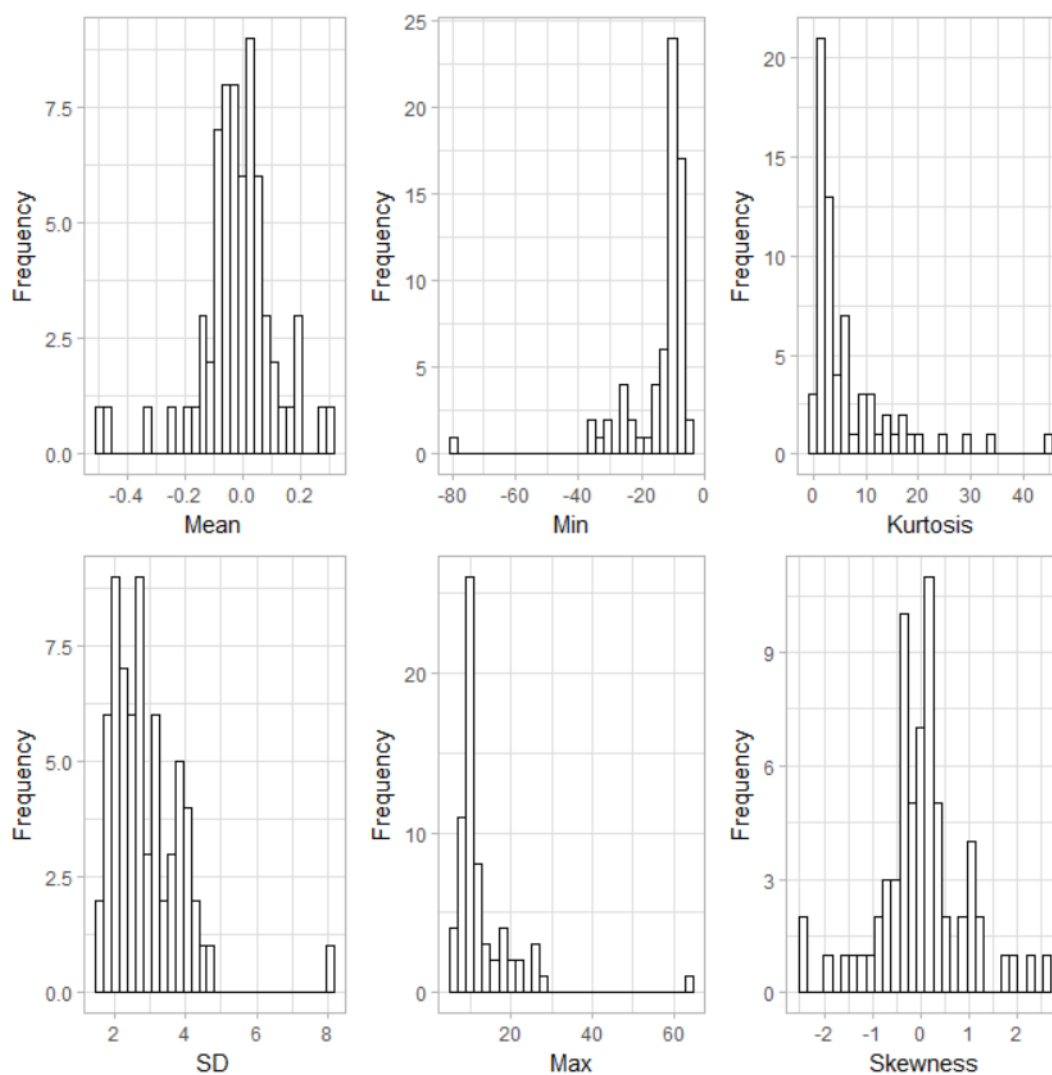


Рис. 1: Описательная статистика

Для построения весовых матриц  $W$  использованы следующие критерии: принадлежность к стране, принадлежность к определенной группе по классификатору Thomson Reuters Business Classification (таблица 1), рыночная капитализация, размер активов компании и прибыль. На основании первых двух критериев построена бинарная весовая матрица  $W_{bin}$ , каждый недиагональный элемент которой принимает значение 1, если компании, соответствующие этому элементу, находятся в одной стране и одной классификационной группе. Последние три показателя взяты за 2016 г. и используются для расчета второй весовой матрицы  $W_{dist}$ , элементы которой отражают экономическое расстояние между фирмами согласно формуле (10).

Вычисления проводились с помощью сервиса Amazon Elastic Compute Cloud<sup>2</sup>, а также пакетов *rmgarch* (Ghalanos, 2015) и *optimx* (Nash, 2014) для языка программирования R.

Оцененные параметры для обеих весовых матриц статистически значимы на уровне 5%. В таблице 2 приведены информационные критерии Akaike и Schwarz для исследуемых моделей. Информационные критерии вычислялись по формулам:  $AIC = -LL/n + 2m/n$ ,  $BIC = -LL/n + 2m \ln n/n$ , где  $m$  — количество оцениваемых параметров в модели. Согласно таблице 2, спатильная ВЕКК обладает наибольшим значением функции правдоподобия с учетом

<sup>2</sup><https://aws.amazon.com/ru/ec2/>

Таблица 1: Отраслевые группы классификатора TRBC

Code	Activity	Group
5010202010	Oil & Gas Exploration and Production (NEC)	Activity1
5010201010	Integrated Oil & Gas	Activity2
5010202013	Natural Gas Exploration & Production - Onshore	Activity3
5010203010	Oil & Gas Refining and Marketing (NEC)	Activity4
5010203011	Petroleum Refining	Activity5
5010203012	Gasoline Stations	Activity6
5010202011	Oil Exploration & Production - Onshore	Activity7
5010202015	Unconventional Oil & Gas Production	Activity8

числа наблюдений и параметров.

Таблица 2: Информационные критерии

Критерий / модель	AIC	BIC
S-BEKK ( $W_{dist}$ )	199,46	201,18
ADCC	294,36	318,75
GO-GARCH	297,85	409,77

Поскольку применение информационных критериев для невложенных моделей может быть не совсем корректным, мы проведем внутривыборочное сравнение с помощью теста Вонга (Vuong, 1989).

### 3.1 Внутривыборочное сравнение

По результатам внутривыборочного сравнения согласно тесту Вонга нулевая гипотеза об одинаковой прогнозной силе спатальной БЕКК и остальных моделей не отклоняется на любом разумном уровне значимости (таблица 3).

Таблица 3: P-значение для теста Вонга

Модель	GO-GARCH	ADCC
S-BEKK, $W_{bin}$	0,14	0,32
S-BEKK, $W_{dist}$	0,14	0,26

Примечание:  $p > 0,1$ ; \* $p < 0,1$ ; \*\* $p < 0,05$ ; \*\*\* $p < 0,01$ .

### 3.2 Вневыборочное сравнение

Вневыборочное сравнение спатальной БЕКК и других моделей для одношагового и многошагового прогнозов дает неоднозначные результаты (таблица 4). В частности, при одношаговом прогнозе спатальная БЕКК демонстрирует одинаковую прогнозную способность с моделями GO-GARCH и ADCC для функции потерь  $g_3$ , «штрафующей» переоценку волатильности. Для многошагового прогноза спатальная БЕКК превосходит по прогнозной силе GO-GARCH для функции потерь  $g_2$ , «штрафующей» недооценку волатильности. В остальных случаях GO-GARCH и ADCC значимо лучше, чем спатальная БЕКК согласно тесту Диболда-Мариано.

Таблица 4: Статистика теста Диболда-Мариано

Модель/Функция потерь	$g_1$	$g_2$	$g_3$
Одношаговый прогноз			
S-BEKK и GO-GARCH	6,26***	7,04***	-0,18
S-BEKK и ADCC	10,60***	11,15***	1,00
Многошаговый прогноз			
S-BEKK и GO-GARCH	130,26***	-7,42***	47,60***
S-BEKK и ADCC	129,91***	14,97***	47,60***

Примечание:  $p > 0, 1$ ; \* $p < 0, 1$ ; \*\* $p < 0, 05$ ; \*\*\* $p < 0, 01$ .

Результаты процедуры MCS для одношагового и многошагового прогнозов представлены в таблице 5.

Таблица 5: Множество моделей, полученное в ходе теста Хансена-Лунде-Нэйсона

Функция потерь	$g_1$	$g_2$	$g_3$
Одношаговый прогноз			
Модели	ADCC	ADCC	S-BEKK и ADCC
Многошаговый прогноз			
Модели	ADCC	GO-GARCH	ADCC

Примечание:  $p > 0, 1$ ; \* $p < 0, 1$ ; \*\* $p < 0, 05$ ; \*\*\* $p < 0, 01$ .

Видно, что для одношагового прогноза наилучшей моделью для функций потерь  $g_1$  и  $g_2$  является ADCC. Что касается функции потерь  $g_3$ , то полученный набор моделей состоит из спатиальной BEKK и ADCC.

В случае многошагового прогноза, результаты указывают на то, что модель ADCC входит в полученный, согласно тестированию Хансена-Лунде-Нэйсона, набор моделей в двух случаях из трех для функций потерь  $g_1$  и  $g_3$ . Для  $g_2$  лучшей моделью оказалась GO-GARCH.

Таким образом, по результатам внутривыборочного сравнения спатиальная BEKK обладает такой же объясняющей способностью, что и модели-бенчмарки GO-GARCH и ADCC. При вневыборочном сравнении спатиальная BEKK демонстрирует менее стабильные результаты. Для цели данного исследования, а именно, оценки ЭПВ, решающее значение все же имеет объясняющая способность, в чем спатиальная BEKK не уступает моделям-бенчмаркам согласно тесту Вонга на любом разумном уровне значимости. Поэтому спатиальная BEKK может считаться в данном случае пригодным инструментом для оценки ЭПВ. Более того, достоинством данной модели является то, что она позволяет учитывать взаимосвязи между компаниями.

### 3.3 Визуализация эффектов перетекания волатильности

Оценки параметров спатиальной BEKK могут применяться для визуализации ЭПВ.

На Рис. 2 показан граф, в котором каждая вершина соответствует фирмам, принадлежащим указанной рядом с вершиной отраслевой группе согласно таблице 1. Вес ребра (толщина на рисунке) соответствует размеру ЭПВ между двумя вершинами, т.е. среднему значению ЭПВ по фирмам, относящимся к двум вершинам, которые соединяются ребром. Цвет ребра

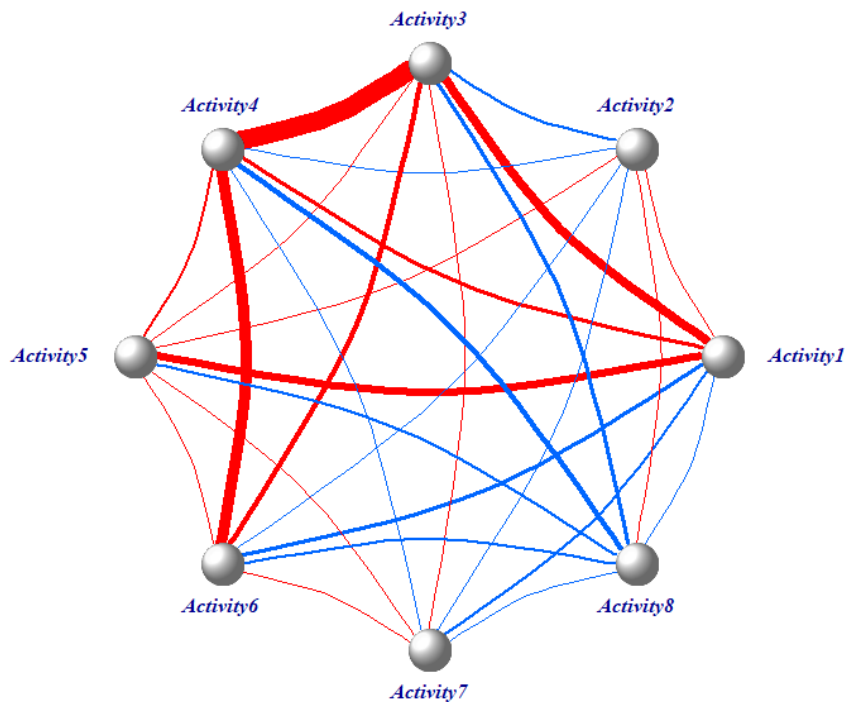


Рис. 2: Эффекты перетекания волатильности для весовой матрицы  $W_{bin}$

указывает на знак ЭПВ: красный — для положительных значений, синий — для отрицательных. По Рис. 2 видно, что наибольший положительный ЭПВ наблюдается между группами 3 и 4, т.е. «разведка и добыча природного газа на суше» и «нефтегазопереработка». Наибольший отрицательный ЭПВ наблюдается между группами 4 и 8, т.е. «нефтегазопереработка» и «нетрадиционная добыча нефти и газа».

ЭПВ между фирмами, принадлежащими к различным странам, показаны на Рис. 3. Наибольшая положительная связь наблюдается между Аргентиной и Колумбией. Также имеет место значительный ЭПВ между двумя этими странами и Россией. Наиболее сильные отрицательные ЭПВ наблюдаются между Китаем и Аргентиной, Россией и Саудовской Аравией, Аргентиной и Нигерией.

## 4 Заключение

Эффекты распространения волатильности играют важную роль в управлении финансовыми рисками и связаны с пространственными зависимостями между активами. Это подтверждает актуальность использования спатальной ВЕКК, которая учитывает пространственную зависимость между активами с помощью весовых матриц, выражающих степень близости активов или экономическое расстояние между ними. Кроме того, такая спецификация решает проблему нелинейного роста числа параметров относительно числа активов (т.н. «проклятие размерности»).

В статье рассмотрены 67 компаний нефтегазового сектора, расположенные в 13 странах. Пространственная зависимость между компаниями моделируется на основе информации о принадлежности к экономическому сектору, стране, а также экономическому расстоянию.

С помощью теста Вонга сравнивается объясняющая способность спатальной ВЕКК и неспатальных GO-GARCH и ADCC, а с помощью тестов Диболда-Мариано и Хансена-Лунде-Нэйсона с применением трех функций потерь — их предсказательная способность.

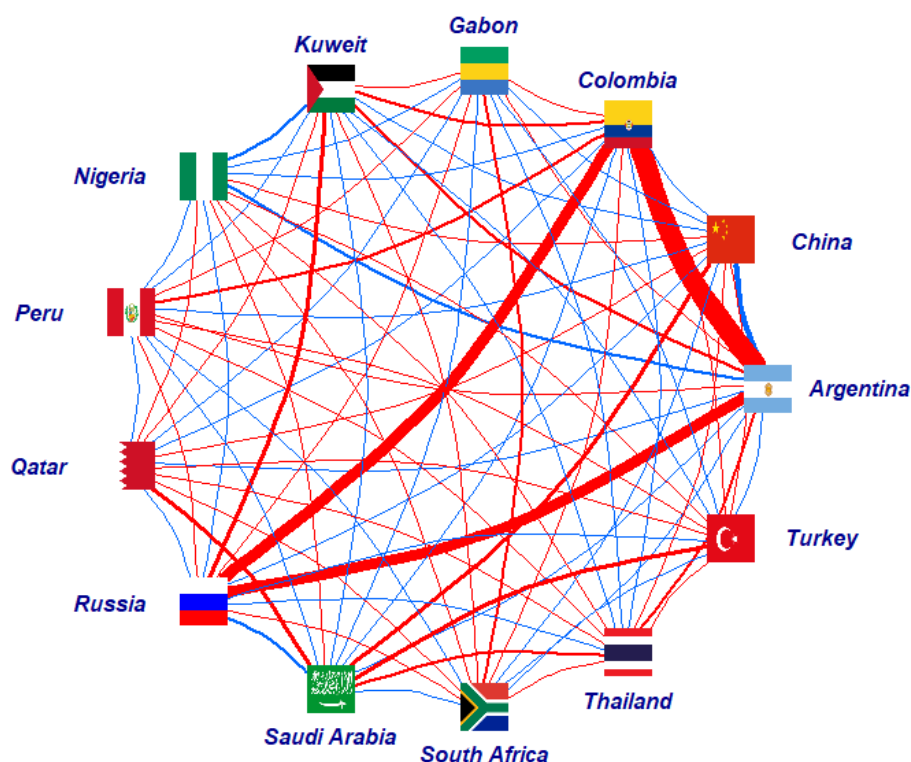


Рис. 3: Эффекты перетекания волатильности для весовой матрицы  $W_{bin}$

По результатам теста Вонга все три рассматриваемые модели имеют равную объясняющую способность на любом разумном уровне значимости. При вневыборочном сравнении тесты не дают четких свидетельств значимого превосходства пространственной спецификации над остальными моделями. При этом для функции потерь, налагающей «штраф» за переоценку волатильности, пространственная ВЕКК демонстрирует одинаковую предсказательную способность с другими анализируемыми моделями для одношагового прогноза.

Полученные оценки показывают наличие положительных и отрицательных эффектов перетекания волатильности между исследуемыми активами. Например, наибольший положительный ЭПВ наблюдается между группами активов, принадлежащим к таким секторам нефтегазового рынка, как «разведка и добыча природного газа на суше» и «нефтегазопереработка». Наибольший отрицательный ЭПВ наблюдается между группами «нефтегазопереработка» и «нетрадиционная добыча нефти и газа».

## Список литературы

- Анатольев, С. & С. Храпов (2019). Улучшают ли пространственные структуры прогнозы волатильности? *Квантиль* 14, 63–81.
- Балаш, В., О. Балаш & А. Харламов (2011). Эконометрический анализ геокодированных данных о ценах на жилую недвижимость. *Прикладная эконометрика* 2, 62–77.
- Лакшина, В. (2014). Можно ли снять «проклятие размерности»? Пространственные спецификации многомерных моделей волатильности. *Прикладная эконометрика* 4, 61–78.
- Akman, E. & I. Bozkurt (2016). On the mixed indirect effects of oil prices on international trade. *OPEC Energy Review* 40, 374–396.
- Arnold, M., S. Stahlberg & D. Wied (2013). Modeling different kinds of spatial dependence in stock returns. *Empirical Economics* 44, 761–774.

- Arouri, M., J. Jouini & D. Nguyen (2011). Volatility spillovers between oil prices and stock sector returns: Implications for portfolio management. *Journal of International Money and Finance* 30, 1387–1405.
- Arouri, M., J. Jouini & D. Nguyen (2012). On the impacts of oil price fluctuations on European equity markets: Volatility spillover and hedging effectiveness. *Energy Economics* 34, 611–617.
- Baba, Y., R. Engle, D. Kraft & K. Kroner (1989). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. Working paper, University of California, San Diego.
- Bachelier, L. (1900). *Théorie de la Spéculation*. Gauthier-Villars.
- Billio, M., M. Caporin, L. Frattarolo & L. Pelizzon (2016). Networks in risk spillovers: A multivariate GARCH perspective. Working paper, University of Venice “Ca’ Foscari”.
- Borovkova, S.A. (2016). Spatial GARCH: A spatial approach to multivariate volatility modelling. Working paper, Vrije Universiteit Amsterdam.
- Caporin, M. & P. Paruolo (2015). Proximity-structured multivariate volatility models. *Econometric Reviews* 34, 559–593.
- Cappiello, L., R.F. Engle & K. Sheppard (2006). Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial Econometrics* 4, 537–572.
- Chen, X. & Y. Tian (2017). Impact effects and spatial volatility spillover effects of sovereign credit rating downgrades – Empirical analysis of multivariate spatial BEKK-GARCH model based on symbolic transfer entropy. *Boletín Técnico* 55(9), 614–623.
- Diebold, F.X. & R.S. Mariano (2002). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics* 20, 134–144.
- Dornbusch, R., Y.C. Park & S. Claessens (2000). Contagion: Understanding how it spreads. *World Bank Research Observer* 15, 177–197.
- Engle, R. & K.F. Kroner (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory* 11, 122–150.
- Ewing, B., F. Malik & O. Ozfidan (2002). Volatility transmission in the oil and natural gas markets. *Energy Economics* 24, 525–538.
- Ghalanos, A. (2015). rmgarch: Multivariate GARCH models. R package version 1.3-0.
- Gu, H., Z. Liu & Y. Weng (2017). Time-varying correlations in global real estate markets: A multivariate GARCH with spatial effects approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 471, 460–472.
- Hansen, P.R., A. Lunde & J.M. Nason (2011). The model confidence set. *Econometrica* 79, 453–497.
- Jaworski, P. & M. Pitera (2014). On spatial contagion and multivariate GARCH models. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 30, 303–327.
- Kocaarslan, B., R. Sari, A. Gormus & U. Soytas (2017). Dynamic correlations between BRIC and U.S. stock markets: The asymmetric impact of volatility expectations in oil, gold and financial markets. *Journal of Commodity Markets* 7, 41–56.
- Laurent, S., J.V.K. Rombouts & F. Violante (2012). On the forecasting accuracy of multivariate GARCH models. *Journal of Applied Econometrics* 27, 934–955.
- Lin, B., P. Wesseh & M. Appiah (2014). Oil price fluctuation, volatility spillover and the Ghanaian equity market: Implication for portfolio management and hedging effectiveness. *Energy Economics* 42, 172–182.
- Liu, X., H. An, S. Huang & S. Wen (2017). The evolution of spillover effects between oil and stock markets across multi-scales using a wavelet-based GARCH–BEKK model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 465, 374–383.
- Liu, X., H. An, H. Li, Z. Chen, S. Feng & S. Wen (2017). Features of spillover networks in international financial markets: Evidence from the G20 countries. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 479, 265–278.
- Mensi, W., S. Hammoudeh & S. Kang (2017). Risk spillovers and portfolio management between developed and BRICS stock markets. *North American Journal of Economics and Finance* 41, 133–155.
- Nash, J.C. (2014). On best practice optimization methods in R. *Journal of Statistical Software* 60, 1–14.
- Olson, E., A. Vivian & M. Wohar (2014). The relationship between energy and equity markets: Evidence from volatility impulse response functions. *Energy Economics* 43, 297–305.

- Schmidt, A. (2005). Chapter 1: Introduction. Глава в *Quantitative Finance for Physicists* под редакцией A.B. Schmidt. Academic Press Advanced Finance. Boston: Academic Press, 1–4.
- Serletis, A. & L. Xu (2016). The zero lower bound and crude oil and financial markets spillovers. *Macroeconomic Dynamics* 22, 654–665.
- Weide, R. van der (2002). GO-GARCH: A multivariate generalized orthogonal GARCH model. *Journal of Applied Econometrics* 17, 549–564.

## Volatility spillovers with spatial effects in the oil and gas market

**Efrosiniya Karatetskaya**

*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

**Valeriya Lakshina**

*National Research University Higher School of Economics, Nizhni Novgorod, Russia*

The article is devoted to estimation of volatility spillovers in the oil and gas market accounting for cross-sectional dependence. We use data on daily stock returns of 67 companies from the oil and gas sector from 13 countries. The volatility spillovers are estimated via a spatial specification of the BEKK model. Using the Vuong test, we compare explanatory power of the spatial BEKK and non-spatial GO-GARCH и ADCC models, the Diebold-Mariano and Hansen-Lunde-Nason tests being used for evaluating the predictive ability. The Vuong test reveals equal explanatory ability of the three models at any reasonable significance level. In the out-of-sample comparison, the tests do not provide clear evidence of significant superiority of the spatial specification over the other models.

*Keywords: multivariate volatility models, spatial specifications, oil and gas market, volatility spillover effects*

*JEL Classification: C58, C32, Q49*

